Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Пермский нефтяной колледж»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
П.В. Корнейчук
17 июня 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ОП.01 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

для реализации Программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности
21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений
(технологический профиль профессионального образования)

2025

Рабочая программа учебной дисциплины ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональный задач разработана на основе:

- Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений (утвержден Приказом Минпросвещения России от 08.11.2023 № 833, зарегистрирован в Минюсте России 04.12.2023 № 76249).
- Приказа Минобрнауки России № 885, Минпросвещения России № 390 от 05 августа 2020 г. «О практической подготовке обучающихся» (с изменениями и дополнениями).
- Учебного плана ППССЗ по специальности 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, утвержденного директором колледжа от 11 июня 2025 г.
- Положения о порядке разработки и утверждения в ГБПОУ «Пермский нефтяной колледж» образовательных программ среднего профессионального образования – программ подготовки специалистов среднего звена и их актуализации (обновления) от 16.11.2018.

Одобрено на заседании
Предметно-цикловой комиссии,
выпускающей студентов на государственную
итоговую аттестацию
Протокол № 07 от 16 июня 2025 г.

Рекомендована к утверждению
Методическим советом ГБПОУ «ПНК»
Заключение Методического совета Протокол № 10 от 16 июня 2025 г.

Разработчик:
ГБПОУ «ПНК»
Степанова Татьяна Владимировн, преподаватель

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	**4**
2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	**5**
3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	**11**
4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	**13**
5. ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ В ДРУГИХ ППССЗ	**14**
ПРИЛОЖЕНИЕ А Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ	**15**
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся	**82**
ПРИЛОЖЕНИЕ В Контрольно-оценочные средства промежуточной аттестации	**95**

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

1.1 Область применения программы и место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Учебная дисциплина ОП.08 Математические методы решения прикладных профессиональных задач является обязательной частью общепрофессионального цикла образовательной программы специальности 21.02.01 Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений

1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

1.2.1Цели и задачи дисциплины:

В результате освоение дисциплины обучающий должен знать и уметь:

Знать:

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Уметь:

- выполнять действия над комплексными числами;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами.

1.2.2 Планируемые результаты освоение профессиональной дисциплины в соответствии с ФГОС СПО

В результате освоение дисциплины обучающийся должен обладать общими и (профессиональными) компетенциями включающими в себя способность:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ПК 1.2. Выполнять обработку геологической информации о месторождении

ПК 1.4. Оценивать добывные возможности скважин.

1.4. Количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины:

Объём образовательной программы 86 ч, в том числе:
учебной нагрузки обучающегося во взаимодействии с преподавателем 80 ч.
самостоятельной работы обучающегося 6 ч.

2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	**Объем часов**
Объем образовательной программы	**86**
Самостоятельная работа обучающегося	**6**
Учебная нагрузка обучающихся во взаимодействии с преподавателем	**80**
в том числе:	
теоретическое обучение	**36**
практические занятия	**40**
консультации	**2**
промежуточная аттестация: дифференцированный зачёт	**2**

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Наименование разделов и тем		Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся	Объем часов	Формируемые компетенции
1		2	3	4
Раздел 1. Линейная алгебра.				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 1.2.,ПК 1.4.
Тема 1.1 Матрицы. Действия с матрицами	**Содержание учебного материала**			
	1	Цели и задачи математики. Связи с общепрофессиональными дисциплинами и дисциплинами профессионального цикла. Определение матрицы. Виды матриц: матрица-строка, матрица-столбец, диагональная, единичная, треугольная, нулевая. Определение главной диагонали матрицы. Линейные операции над матрицами: умножение матрицы на число, сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, транспонирование. Свойства линейных операций над матрицами. Свойства транспонирования матрицы.	2	
	Практическое занятие:			
	2	**ПР№1** Действия с матрицами	2	
Тема 1.2 Определитель матрицы.	**Содержание учебного материала**			
	3	Определитель матрицы: определитель первого, второго, третьего, четвертого порядков. Основные свойства определителей: определитель равный нулю, умножение определителя на число, определитель транспонированной матрицы, определитель при перестановке строк (столбцов), определитель с одинаковыми строками (столбцами), определитель с пропорциональными элементами в строках (столбцах), неизменность определителя, определитель произведения двух квадратных матриц. Вычисление определителей второго и третьего порядка. Вычисление определителя через приведение к треугольному виду	2	
Тема 1.3 Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца	**Содержание учебного материала**			
	4	Миноры и алгебраические дополнения определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителей третьего и четвертого порядков методом разложения по строке или столбцу.	2	
	Практическое занятие:			
	5	**ПР№2** Вычисление определителей различными способами	2	
Тема 1.4 Решение систем линейных уравнений в матричной форме и по формулам Крамера	**Содержание учебного материала**			
	6	Основные понятия и определения систем линейных уравнений (далее СЛУ): вид СЛУ, коэффициенты при переменных и свободные члены СЛУ, решение СЛУ, совместная/несовместная СЛУ, определенная/неопределенная СЛУ. Равносильные или эквивалентные СЛУ, СЛУ в матричной форме. Формулировка теоремы Крамера. Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений.	2	
	Практическое занятие:			
	7	**ПР№3.** Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера	2	

	Самостоятельная работа обучающихся:			
		СР№1 Решение простейших матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений в матричной форме	2	
Тема 1.5 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	**Практическое занятие:**			
	8	**ПР№4.** Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	2	
Раздел 2. Аналитическая геометрия				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 1.2.,ПК 1.4.
Тема 2.1 Векторы. Скалярное произведение векторов	**Содержание учебного материала**			
	9	Прямоугольная система координат в пространстве. Понятие вектора в пространстве. Длина вектора. Виды векторов: нулевые, коллинеарные, равные, компланарные, противоположные. Линейные операции над векторами: сложение, разность, умножение на число. Разложение вектора по базису. Понятие скалярного произведения. Свойства скалярного произведения: ортогональность ненулевых векторов, переместительный и распределительный закон, сочетательный закон по отношению к скалярному множителю. Некоторые приложения скалярного произведения: угол между векторами, работа постоянной силы.	2	
Тема 2.2 Векторное произведение векторов Смешанное произведение векторов	**Содержание учебного материала**			
	10	Понятие векторного произведения. Геометрический смысл векторного произведения: площадь параллелограмма. Свойства векторного произведения: коллинеарность ненулевых векторов, сочетательный закон по отношению к скалярному множителю, распределительный закон. Некоторые приложения векторного произведения: определение площади треугольника, определение момента силы относительно точки, нахождение линейной скорости вращения. Понятие смешанного произведения. Геометрический смысл смешанного произведения: объем параллелепипеда. Свойства смешанного произведения: равенство нулю, коллинеарность, компланарность, переместительный закон для векторного и скалярного умножения. Некоторые приложения смешанного произведения: установление компланарности векторов, определение объема треугольной пирамиды.	2	
	Практическое занятие			
	11 12	**ПР№5.** Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведения векторов	4	
	Самостоятельная работа обучающихся:			
		СР №2 Применение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических задач.	2	
Раздел 3 Теория комплексных чисел				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 1.2.,ПК 1.4.
Тема 3.1 Комплексные числа. Действия с комплексными числами.	**Содержание учебного материала**			
	13	Понятие мнимой единицы. Определение комплексного числа: действительная и мнимая часть числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сумма, разность, произведение, деление. Тригонометрическая форма комплексного числа. Переход из	2	

		алгебраической формы в тригонометрическую форму комплексного числа. Квадратные уравнения с комплексными корнями.		
	Практическое занятие:			
	14	**ПР№6.** Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сумма, разность, произведение, деление. Решение квадратных уравнений с комплексными корнями.	2	
	15	**ПР №7**. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа	2	
Раздел 4Дифференциальное исчисление				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 2.1. ПК 3.1.
Тема 4.1 Предел функции. Непрерывность функции	**Содержание учебного материала**			
	16	Понятие предела функции. Понятие бесконечно малых и бесконечно больших величин. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин: сумма, разность, произведение, частное от деления. Понятие о непрерывности функции. Предел функции в точке и на бесконечности. Первый и второй замечательные пределы. Методы вычисления пределов функций, раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}$	2	
	Практическое занятие			
	17	**ПР№8.** Вычисление пределов функций, раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов	2	
Тема 4.2 Определение производной функции. Правила и формулы дифференцирования функции	**Содержание учебного материала**			
	18	Понятие приращения аргумента и приращения функции. Определение производной функции. Общее правило нахождения производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила и формулы дифференцирования: производная постоянной, производная аргумента, производная алгебраической суммы, производная произведения, производная частного. Таблица производных. Производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$.	2	
Тема 4.3 Производные высших порядков	**Содержание учебного материала**			
	19	Производные высших порядков. Механический смысл производной. Производная второго порядка и её механический смысл. Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталя.	2	
	Практическое занятие			
	20	**ПР№9.** Вычисление производных элементарных и сложных функций.	2	
Тема 4.4 Дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычисления.	**Содержание учебного материала**			
	21	Понятие дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал сложной функции.. Приближенное вычисление приращения функции. Вычисление погрешности приближенного приращения функции. Нахождение приближенного значения функции.	2	
	Практическое занятие:			
	22	**ПР№10** Приближенные вычисления с помощью дифференциала.	2	

Тема 4.5 Исследование функций и построение графиков	**Содержание учебного материала**			
	23	Исследование на монотонность (возрастание, убывание) и экстремумы функции с помощью первой и второй производной. Исследование на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции с помощью второй производной. Асимптоты и точки разрыва графика функции. Общая схема исследования функций и построения их графиков.	2	
	Практическое занятие:			
	24	**ПР№11.** Нахождение асимптот функции. Построение графиков функций.	2	
	Самостоятельная работа обучающегося			
		СР№3. Построение графиков функций	2	
Раздел 5 Интегральное исчисление				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 1.2.,ПК 1.4.
Тема 5.1 Первообразная и неопределенный интеграл	**Содержание учебного материала**			
	25	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла: производная от неопределенного интеграла, дифференциал неопределенного интеграла, неопределенный интеграл от дифференциала, постоянный множитель в неопределенном интеграле, неопределенный интеграл от алгебраической суммы. Таблица интегралов от основных элементарных функций.	2	
Тема 5.2 Основные методы интегрирования	**Содержание учебного материала**			
	26	Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменной, метод интегрирования по частям.	2	
	Практическое занятие			
	27	**ПР№12.** Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной и методом интегрирования по частям.	2	
Тема 5.3 Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла.	**Содержание учебного материала**			
	28	Понятие определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Основная формула интегрального исчисления: формула Ньютона-Лейбница. Простейшие свойства определенного интеграла: постоянный множитель, интеграл от алгебраической суммы, интеграл на отрезке, когда отрезок разбит на части. Замена переменной в определенном интеграле. Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения. Применение определенного интеграла к решению физических задач.	2	
	Практическое занятие:			
	29	**ПР№13**. Вычисление определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле.	2	
	Практическое занятие			
	30 31	**ПР№14.** Вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.	4	
Раздел 6 Дифференциальные уравнения				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 1.2. ,ПК 1.4
Тема 6.1	**Содержание учебного материала**			
	32	Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Понятие о дифференциальном	2	

Понятие о дифференциальном уравнении Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка.		уравнении. Общее и частное решения дифференциального уравнения. Порядок дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка.		
	Практическое занятие:			
	33	**ПР№15**. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	2	
	Практическое занятие:			
	34	**ПР№16.** Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка	2	
Раздел 7. Элементы теории вероятностей и математической статистики				ОК 01, ОК 02, ОК.04 ПК 1.2.,ПК 1.4.
Тема 7.1 Классическое определение вероятности события. Операции над событиями Повторные испытания. Формула Бернулли.	**Содержание учебного материала**			
	35	Понятие события в теории вероятностей. Достоверное событие, невозможное событие, случайное событие, совместные и несовместные события. Классическое определение вероятности события. Относительная частота события. Расчёт вероятности события с применением классического определения вероятности, с использованием формул комбинаторики. Теорема сложения вероятностей. Независимость событий. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Повторные испытания. Формула Бернулли.	2	
	Практическое занятие:			
	36	**ПР№17.** Решение задач на расчёт вероятности событий.	2	
Тема 7.2 Элементы математической статистики	**Содержание учебного материала**			
	37	Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Закон распределения непрерывной случайной величины. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайной величины. Дисперсия дискретной и непрерывной случайной величины.	2	
	Практическое занятие:			
	38	**ПР№18.**Расчёт математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины	2	
Консультации			**2**	
Промежуточная аттестация: дифференцированный зачёт			**2**	
ВСЕГО:			**86**	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:

1 – ознакомительный (воспроизведение информации, узнавание (распознавание), объяснение ранее изученных объектов, свойств и т.п.);

2 – репродуктивный (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством);

3 – продуктивный (самостоятельное планирование и выполнение деятельности, решение проблемных задач).

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Для реализации программы учебной дисциплины должны быть предусмотрены следующие специальные помещения:

Кабинет *Математики* оснащенный следующим оборудованием:

- рабочие места обучающихся;
- рабочее место преподавателя;
- Проектор;
- Экран;
- Моноблок;
- МФУ;
- Доска классная.

Программное обеспечение на компьютере преподавателя:

- Операционная системаWindows
- Офисный пакет MS Office
- браузеры(ЯндексБраузер)

3.2 Методическое обеспечение учебной дисциплины

1 Методические указания по выполнению практических работ (Приложение А).
2 Методические указания по выполнению внеаудиторных самостоятельных работ (Приложение Б).
3 Контрольно-оценочные средства промежуточной аттестации (Приложение В).

3.2. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, дополнительной литературы, Интернет-ресурсов.

Основные источники:

1. Омельченко, В. П. Математика: учебник / В.П. Омельченко, Н.В. Карасенко. — Москва: ИНФРА-М, 2024. — 349 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1855784. - ISBN 978-5-16-017462-4. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2085068. – Режим доступа: по подписке.

2. Юхно, Н. С. Математика: учебник / Н. С. Юхно. — Москва: ИНФРА-М, 2024. — 204 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1002604. - ISBN 978-5-16-014744-4. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2136718– Режим доступа: по подписке.

3. Дадаян, А. А. Математика: учебник / А. А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: ИНФРА-М, 2024. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-012592-3. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2132236– Режим доступа: по подписке.

Дополнительные источники:

4. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст: электронный

5. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст: электронный

6. Высшая математика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Текст: электронный

7. Григорьев С. Г. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / С. Г. Григорьев, С. В. Иволгина; под ред. В. А. Гусева. - 15-е изд., стер. - М. : Издательский центр «Академия», 2020. - 416 с. – ISBN 978-5-4468-9773-5

8. Спирина М. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. С. Спирина, П.А. Спирин. - 5-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2021. - 352 с. – ISBN 978-5-0054-0142-7

Интернет-ресурсы:

1. http://mathtest.ru/ Математика в помощь школьнику и студенту
2. https://www.mathway.com/Calculus Онлайн калькулятор решения задач
3. https://ru.onlinemschool.com/ Изучение математики онлайн

4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения учебной дисциплины осуществляются преподавателем в процессе проведения *практических занятий, , а также выполнения обучающимися самостоятельной работы, дифференцированного зачёта*

Результаты обучения	Критерии оценки	Методы оценки
Перечень знаний, осваиваемых в рамках дисциплины:		
основные математические методы решения прикладных задач	90-100 % правильных ответов – «5»; 70- 89% правильных ответов – «4»; 50-69 % правильных ответов – «3»; менее 50 % - «2»	устный опрос, тестирование,
основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики	90-100 % правильных ответов – «5»; 70- 89% правильных ответов – «4»; 50-69 % правильных ответов – «3»; менее 50 % - «2»	устный опрос, тестирование,
основы интегрального и дифференциального исчисления	90-100 % правильных ответов – «5»; 70- 89% правильных ответов – «4»; 50-69 % правильных ответов – «3»; менее 50 % - «2»	устный опрос, тестирование,
роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.	0-100 % правильных ответов – «5»; 70- 89% правильных ответов – «4»; 50-69 % правильных ответов – «3»; менее 50 % - «2»	устный опрос, тестирование,
Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины:		
производить операции над матрицами и определителями	90-100 % правильных ответов и выполненных действий – «5»; 70- 89% правильных ответов и выполненных действий – «4»; 50-69 % правильных ответов и выполненных действий – «3»; менее 50 % - «2»	Практическая работа №1-2
решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики	90-100 % правильных ответов и выполненных действий – «5»; 70- 89% правильных ответов и выполненных действий – «4»; 50-69 % правильных ответов и выполненных действий – «3»; менее 50 % - «2»	Практическая работа №17
решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; решать системы линейных уравнений различными методами	90-100 % правильных ответов и выполненных действий – «5»; 70- 89% правильных ответов и выполненных действий – «4»; 50-69 % правильных ответов и выполненных действий – «3»; менее 50 % - «2»	Практическая работа №3-4, 8-16

5 ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ В ДРУГИХ ППССЗ

Рабочая программа учебной дисциплины **ОП. 01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач** может быть использована для обучения по специальностям укрупненной группы профессий и специальностей **21.00.00 Прикладная геология, горное дело, нефтегазовое дело и геодезия**

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Методические указания
для обучающихся по выполнению практических работ

Перечень практических работ

№ п/п	Содержание практических работ	Количество часов
1	**Практическая работа № 1** Действия с матрицами	2
2	**Практическая работа№ 2** Вычисление определителей различными способами	2
3	**Практическая работа № 3** Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера	2
4	**Практическая работа № 4** Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	2
5	**Практическая работа №5** Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведения векторов	4
6	**Практическая работа № 6** Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сумма, разность, произведение, деление. Решение квадратных уравнений с комплексными корнями	2
7	**Практическая работа № 7** Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа	2
8	**Практическая работа № 8** Вычисление пределов функций, раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов	2
9	**Практическая работа № 9** Вычисление производных элементарных и сложных функций	2
10	**Практическая работа № 10** Приближенные вычисления с помощью дифференциала	2
11	**Практическая работа № 11** Нахождение асимптот функции. Построение графиков функций	2
12	**Практическая работа № 12** Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной и методом интегрирования по частям	2
13	**Практическая работа № 13** Вычисление определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле.	2
14	**Практическая работа № 14** Вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.	4
15	**Практическая работа № 15** Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	2
16	**Практическая работа № 16** Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка	2

17	**Практическая работа № 17** Решение задач на расчёт вероятности событий.	**2**
18	**Практическая работа № 18** Расчёт математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины	**2**
	Всего	**40**

Практическая работа № 1

Действия с матрицами

Время проведения – 2 час.

Цель работы: научиться выполнять действия с матрицами

Вопросы для подготовки к работе:

1. Понятие матрицы;
2. Виды матрицы;
3. Определение главной диагонали матрицы.
4. Линейные операции над матрицами: умножение матрицы на число, сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, транспонирование.
5. Свойства линейных операций над матрицами.
6. Свойства транспонирования матрицы.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо **элементов**. В качестве **элементов** мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы. **ЭЛЕМЕНТ** – это термин. Термин желательно запомнить, он будет часто встречаться.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами *A, B, C*.

Действия с матрицами:

1) Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу).

Вынесем минус за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -4 & 7\\ -6 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

Внесем минус в матрицу, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$E=-\begin{pmatrix}-4 & 13 & -6\\ -17 & 5 & 7\\ -3 & -4 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -13 & 6\\ 17 & -5 & -7\\ 3 & 4 & 15\end{pmatrix}$$

2) Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3\cdot\begin{pmatrix}12 & -1\\ 7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 12 & 3\cdot(-1)\\ 3\cdot 7 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & -3\\ 21 & 0\end{pmatrix}$$

Пример:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & 8\\ -10 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 7 & 4\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

3) Транспонирование матрицы

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пример:

Транспонировать матрицу $D = (7 \quad 3 \quad -12 \quad 0 \quad 34)$.

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T=\begin{pmatrix}7\\ 3\\ -12\\ 0\\ 34\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица.

4) Сумма (разность) матриц.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F+G=\begin{pmatrix}12 & -1\\ -5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 15 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+(-4) & -1+(-3)\\ -5+15 & 0+7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12-4 & -1-3\\ -5+15 & 0+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4\\ 10 & 7\end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

5) Умножение матриц.

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L необходимо, **чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L.**

Пример:

$$PS=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot 3+8\cdot 4-4\cdot 9 & 5\cdot 2+8\cdot(-1)-4\cdot 6 & 5\cdot 5+8\cdot 3-4\cdot 5\\ 6\cdot 3+9\cdot 4-5\cdot 9 & 6\cdot 2+9\cdot(-1)-5\cdot 6 & 6\cdot 5+9\cdot 3-5\cdot 5\\ 4\cdot 3+7\cdot 4-3\cdot 9 & 4\cdot 2+7\cdot(-1)-3\cdot 6 & 4\cdot 5+7\cdot 3-3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}$$

Внимание! Понятия квадрата матрицы не существует!

Если для матрицы А необходимо вычислить A^2, то это означает, что необходимо выполнить действие А*А.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти значение матричного многочлена AB + B^2-3B, если:

1	$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\1&0&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&-1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix}7&0&-1\\1&-1&0\\1&1&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&1&4\\0&-1&1\\3&3&-1\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-1&6\\0&-1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\2&3&1\end{pmatrix}$	7	$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&-1&3\\2&0&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&5\\8&0&3\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\1&-1&1\\-1&0&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&4&3\\-3&-1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&-1&4\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-1&1\\3&4&2\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\3&-1&4\\-1&0&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\-3&-1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$	9	$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\3&-3&3\\2&4&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&-1&0\\8&1&2\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-1&0\\-5&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\3&-1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$	10	$A-\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-1&7\\-1&3&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2&4\\0&-1&5\\1&1&1\end{pmatrix}$

Практическая работа № 2

Вычисление определителей различными способами

Время проведения – 2 час.

Цель работы: научиться вычислять определители различными способами

Вопросы для подготовки к работе:

7. Понятие определителя матрицы;
8. Формула определителя второго порядка;
9. Формула определителя третьего порядка;
10. Свойства определителей;
11. Теорема о разложении определителя матрицы по элементам любой строки или столбца

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы!

Обозначения: Если дана матрица A , то ее определитель обозначают $|A|$. Также очень часто определитель обозначают латинской буквой D или греческой Δ.

Пусть задана квадратная матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы (определитель второго порядка) вычисляется следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Пример:</u> Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

Решение:

Имеем определитель второго порядка. Используем формулу, указанную выше.

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - (-4) \cdot 7 = 30 + 28 = 58$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 58$

Пусть задана квадратная матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определитель этой матрицы (определитель третьего порядка) вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Определитель третьего порядка вычислить легко, если учесть следующее правило: со знаком плюс идут произведения троек чисел, расположенных на главной диагонали матрицы, и в вершинах треугольников с основанием параллельным этой диагонали и вершиной противоположного угла матрицы. Со знаком минус идут тройки из второй диагонали и из треугольников, построенных относительно этой диагонали. Это правило называют правилом треугольников.

<u>Пример</u>: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Решение:

Имеем определитель третьего порядка, для его вычисления воспользуемся правилом треугольников:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot(-1) - 3\cdot 0\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot 3 = 0 + 12 - 4 + 0 + 16 - 6 = 18$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18$

Для определителей четвертого и более высоких порядков обычно применяют разложение по элементам строки или столбца. Определитель равен сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраическое дополнение (число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} - минор к элементу a_{ij} определителя $n-го$ порядка, то есть определитель $(n-1)-го$ порядка, полученный из исходного вычеркиванием $i-той$ строки и $j-ого$ столбца). Обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом есть нули.

<u>Пример</u>: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение:

Используем формулу разложения по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 1\cdot A_{24} = A_{21} + A_{24} =$$

$$= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(12 + 1 + (-4) - (-2) - 8 - 3) + 1\cdot(2 + 12 + (-4) - 8 - (-4) - 3) = (-1)\cdot 0 + 1\cdot 3 = 3$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вычислить определители:

1. а) $\begin{vmatrix} -16 & 35 \\ 20 & 102 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 66 & -20 & 32 \\ -1 & 24 & 1 \\ 30 & -2 & 12 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 8 & 10 \\ 15 & -3 & 40 & 12 \\ 6 & 23 & 8 & -1 \\ 4 & -5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix} 11 & -33 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 13 & -40 & 3 \\ 29 & -2 & 4 \\ 32 & 23 & -12 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 29 & 41 & -30 & 23 \\ 25 & 11 & -6 & 7 \\ 18 & -13 & 77 & 56 \\ 23 & -12 & 10 & 34 \end{vmatrix}$

3. а) $\begin{vmatrix} 5 & -30 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 25 & -20 & 5 \\ 10 & -15 & 35 \\ -40 & 45 & -50 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 33 & 45 & 15 & -30 \\ 18 & -21 & 6 & 3 \\ 18 & -24 & 27 & 36 \\ 39 & -42 & 9 & 48 \end{vmatrix}$

4. а) $\begin{vmatrix} 40 & -20 \\ 16 & 12 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 60 & -24 & 18 \\ 48 & -12 & 36 \\ 42 & 54 & -66 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 43 & 45 & 15 & -30 \\ 18 & -34 & 5 & 43 \\ 67 & -21 & 216 & 10 \\ 100 & -45 & 12 & 176 \end{vmatrix}$

5. а) $\begin{vmatrix} 48 & -80 \\ 16 & -24 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 64 & -32 & 40 \\ -56 & 72 & 36 \\ 63 & 45 & 88 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 40 & -100 & 14 & 50 \\ 10 & -38 & 44 & -52 \\ 70 & 22 & -108 & 76 \\ 98 & -46 & 16 & -18 \end{vmatrix}$

6. а) $\begin{vmatrix} -37 & 13 \\ 23 & 17 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 29 & 31 & -11 \\ 39 & 52 & 38 \\ -16 & 49 & -81 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} -56 & 51 & -61 & 59 \\ 103 & 56 & -76 & 75 \\ 34 & -70 & 89 & 34 \\ 88 & 73 & -57 & 78 \end{vmatrix}$

7. а) $\begin{vmatrix} 51 & 76 \\ 29 & -62 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 28 & 78 & 80 \\ 37 & 57 & 38 \\ 86 & 79 & -51 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 23 & 56 & 81 & 58 \\ 87 & 52 & 78 & 72 \\ 10 & -56 & 21 & 32 \\ 18 & 12 & -27 & 28 \end{vmatrix}$

8. а) $\begin{vmatrix} 16 & -97 \\ 78 & 58 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 67 & 45 & 80 \\ 68 & -56 & 89 \\ 34 & 76 & -12 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 76 & -45 & 36 & -101 \\ 65 & 89 & 45 & 87 \\ -68 & -76 & 57 & -67 \\ 58 & 40 & 30 & 34 \end{vmatrix}$

9. а) $\begin{vmatrix} 45 & -67 \\ 39 & -45 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 56 & -78 & 23 \\ 90 & -6 & 45 \\ 74 & 23 & 98 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 56 & -56 & 58 & 23 \\ -87 & 34 & 90 & 29 \\ -87 & 47 & -89 & 45 \\ 23 & 98 & 57 & -76 \end{vmatrix}$

10. а) $\begin{vmatrix} 76 & -40 \\ 54 & 76 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 56 & 42 & -32 \\ 76 & 2 & -76 \\ 39 & 3 & 98 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 56 & -23 & 67 & 34 \\ -45 & 97 & 23 & 89 \\ -4 & 67 & 18 & -43 \\ 87 & 34 & 78 & 33 \end{vmatrix}$

Практическая работа № 3

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Время проведения – 2 час.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений по формулам Крамера;

Вопросы для подготовки к работе:

1. Понятие системы линейных уравнений;
2. Совместные и несовместные системы линейных уравнений;
3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера;

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Пример: Найдите решение системы линейных $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ уравнений при помощи метода Крамера.

Решение:

Вычисляем определитель матрицы системы по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Имеем,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по Теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получим из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом свободных коэффициентов. Будем иметь:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 9 \cdot 2 = 7 - 18 = -11$$

Аналогично, определитель Δ_2 получается из определителя матрицы системы Δ путем замены второго столбца столбцом свободных коэффициентов6

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 7 \cdot 2 = 45 - 14 = 31$$

Тогда получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1} = 31$$

Ответ: $x_1 = -11, x_2 = 31$

<u>Пример:</u> Найдите решение системы линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Перепишем систему в виде $\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$, чтобы стало видно основную матрицу системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем ее определитель по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Имеем,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1(-1) \cdot (-1) =$$
$$= 0 + 0 + 0 - 6 - 0 - 1 = -7$$

Определитель основной матрицы отличен от нуля, следовательно. система линейных уравнений имеет единственное решение. Найдем его методом Крамера. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=4\cdot2\cdot0+0\cdot(-1)\cdot1+1\cdot1\cdot(-1)-1\cdot2\cdot1-0\cdot1\cdot0-4(-1)\cdot(-1)=$$

$$=0+0-1-2-0-4=-7$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot0+0\cdot1\cdot1+4\cdot3\cdot(-1)-1\cdot1\cdot3-0\cdot4\cdot0-1\cdot1\cdot(-1)=$$

$$=0+0-12-3-0+1=-14$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot1+0\cdot(-1)\cdot4+0\cdot1\cdot3-4\cdot2\cdot3-0\cdot0\cdot1-1\cdot1\cdot(-1)=$$

$$=2+0+0-24-0+1=-21$$

Таким образом,

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2$$

$$x_1=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-21}{-7}=3$$

Ответ: $x_1=1, x_2=2, x_3=3$

Пример: Найдите решение системы линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3+x_4=0\\ x_1+x_4=-1\\ -x_1-x_2+2x_3-x_4=1\\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4=-2\end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель основной матрицы системы, разложив его по элементам второй строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}+1\cdot A_{24}=A_{21}+A_{24}=$$

$$=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & -4 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot(12+1+(-4)-(-2)-8-3)+1\cdot(2+12+(-4)-8-(-4)-3)=(-1)\cdot0+1\cdot3=3$$

Определитель основной матрицы системы отличен от нуля, поэтому для решения системы можно воспользоваться методом Крамера. Найдем $\Delta_1, \Delta_{2,} \Delta_3, \Delta_4$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{24} = -A_{21} + A_{24} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$$

Аналогично вычисляются:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -2$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1	*Вариант 2*

1. Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера: 1) $\begin{cases} x+y-z=6, \\ 2x+3y+z=9, \\ x+2y+4z=-1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$	1. Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера: 1) $\begin{cases} x-y-z=-2, \\ x+2y+z=3, \\ 2x+y-3z=7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=-2, \\ 4x_1+2x_2-5x_3+2x_4=1. \end{cases}$

Практическая работа № 4
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Время проведения – 2 час.

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса

Вопросы для подготовки к работе:

1. Понятие системы линейных уравнений;
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса;

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в том, что при помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась *трапециевидной или близкой к трапециевидной.*

Пример. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса. $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x-y=-2 \\ 3x-y+2z=-2 \end{cases}$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и при помощи элементарных преобразований над ее строками приведем эту матрицу к ступенчатому виду (прямой ход) и далее выполним обратный ход метода Гаусса (сделаем нули выше главной диагонали). Вначале поменяем первую и вторую строку, чтобы элемент a_{11} равнялся 1 (это мы делаем для упрощения вычислений):

$$\widetilde{A} = A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Далее делаем нули под главной диагональю в первом столбце. Для этого от второй строки отнимаем две первых, от третьей - три первых: $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$

Все элементы третьей строки делим на два $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Далее делаем нули во втором столбце под главной диагональю, для удобства вычислений поменяем местами вторую и третью строки, чтобы диагональный элемент равнялся 1:

$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$ От третьей строки отнимаем вторую, умноженную на 3: $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right)$ Умножив третью строку на 0,5 , получаем: $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Проведем теперь обратный ход метода Гаусса (метод Гассу-Жордана), то есть сделаем нули над главной диагональю. Начнем с элементов третьего столбца. Надо обнулить элемент a_{23}, для этого от второй строки отнимем третью: $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Далее обнуляем недиагональные элементы второго столбца, к первой строке прибавляем вторую: $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Полученной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x1 + 0\,x2 + 0\,x3 = -1 \\ 0 \cdot x1 + x2 + 0 \cdot x3 = 1 \\ 0 \cdot x1 + 0 \cdot x2 + x3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x1 = -1 \\ x2 = 1 \\ x3 = 3 \end{cases} \qquad \text{Ответ.} \quad \begin{cases} x1 = -1 \\ x2 = 1 \\ x3 = 3 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1	*Вариант 2*
Решите системы линейных уравнений методом Гаусса: 1) $\begin{cases} x + y - z = 6, \\ 2x + 3y + z = 9, \\ x + 2y + 4z = -1. \end{cases}$	Решите системы линейных уравнений методом Гаусса: 1) $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + 2y + z = 3, \\ 2x + y - 3z = 7. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$	2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=-2, \\ 4x_1+2x_2-5x_3+2x_4=1. \end{cases}$
3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=-1, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+4x_5=3, \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4-x_5=5, \\ 3x_1-2x_2+7x_3+4x_4-6x_5=7. \end{cases}$	3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=-1, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+4x_5=3, \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4-x_5=5, \\ 3x_1-2x_2+7x_3+4x_4-6x_5=7. \end{cases}$

Практическая работа № 5

Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведения векторов

Время проведения – 4 час.

Цель работы: научиться вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов;

Вопросы для подготовки к работе:

1. Линейные действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число).
2. Нелинейные действия с векторами (скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение).
3. Решение задач с помощью векторной алгебры. Условие коллинеарности, условие перпендикулярности, условие компланарности векторов

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}=\{2;-1;5\}, \vec{b}=\{7;1;-3\}$.

Решение:

1. Вычислим координаты векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$:

$$\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}=\{5\cdot2+3\cdot7;5\cdot(-1)+3\cdot1;5\cdot5+3\cdot(-3)\}=\{31;-2;16\},$$

$$\vec{c}_2=4\vec{a}+\vec{b}=\{4\cdot2+7;4\cdot(-1)+1;4\cdot5+(-3)\}=\{15;-3;17\}$$

2. Два вектора коллинеарные, если их координаты пропорциональны, следовательно, проверим пропорциональность координат векторов:

$\dfrac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2}=\dfrac{31}{15}\neq\dfrac{-2}{-3}\neq\dfrac{16}{17}, \Rightarrow \vec{c}_1, \vec{c}_2$ не коллинеарные.

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}=\{-7;1;2\}, \vec{b}=\{3;2;-1\}$?

Решение: Два вектора перпендикулярны , если их скалярное произведение равно 0; скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, вычисляется по

формуле: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$, где $\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}\Rightarrow$ вычислим скалярное произведение:
$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-7\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot\left(-1\right)=-21\neq 0\Rightarrow$ векторы не перпендикулярны.

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\vec{b}=\{0;2;1\},\vec{c}=\{2;0;3\}$?

Решение: Три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, смешанное произведение векторов вычисляется по формуле: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$, где $\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\}\Rightarrow$ вычислим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-6+4+0-\left(-4\right)-0-0=2\neq 0\Rightarrow \text{векторы не компланарны.}$$

Задание 4: При каком значении α векторы $A\vec{B},A\vec{C}$, где $A\left(2;1;\alpha\right),B\left(3;1;4\right),C\left(2;5;3\right).$, перпендикулярны?

Решение:

1) Для определения α, при котором векторы перпендикулярны, необходимо использовать условие перпендикулярности двух векторов (это условие было рассмотрено в задании 2) $\Rightarrow$ α мы сможем найти из условия: $\left(A\vec{B},A\vec{C}\right)=0$, для этого найдем координаты векторов $A\vec{B}$ и $A\vec{C}$, заданных координатами точек начала и конца вектора. В этом случае координаты равны разности координат точек, задающих конец и начало вектора $\Rightarrow$
$A\vec{B}=\{3-2;1-1;4-\alpha\}=\{1;0;4-\alpha\},A\vec{C}=\{2-2;5-1;3-\alpha\}=\{0;4;3-\alpha\}\Rightarrow$
$\left(A\vec{B},A\vec{C}\right)=1\cdot 0+0\cdot 4+\left(4-\alpha\right)\cdot\left(3-\alpha\right)=0+0+\left(4-\alpha\right)\cdot\left(3-\alpha\right)=(4-\alpha)\cdot\left(3-\alpha\right)=0\Rightarrow\alpha=4,\alpha=3.$

Итак: векторы $A\vec{B}$ и $A\vec{C}$ перпендикулярны при $\alpha=4$ и при $\alpha=3$.

Задание 5: Даны точки: $A\left(1;0;-1\right),B\left(0;1;3\right),C\left(2;0;1\right)$.

Найти:

$\angle\left(A\vec{B}-C\vec{B},A\vec{B}\right)$;

Решение: Угол между векторами можно найти из определения скалярного произведения:
$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=arc\cos\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow$ в нашем случае формула принимает вид: $\angle\left(\left(A\vec{B}-C\vec{B}\right),A\vec{B}\right)=\arccos\dfrac{\left(\left(A\vec{B}-C\vec{B}\right),A\vec{B}\right)}{\left|A\vec{B}-C\vec{B}\right|\cdot\left|A\vec{B}\right|}$ $\Rightarrow$ находим координаты векторов, вычисляем их скалярное произведение и длины векторов:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\},$

$\vec{AB}-\vec{CB}=\{(-1)-(-2);1-1;4-2\}=\{1;0;2\},$

$\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=1\cdot(-1)+0\cdot 1+2\cdot 4=7,$

$\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5},$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}$

$\Rightarrow$

$$\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}=\arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=\arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}}=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}};$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

Задание 4: При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны?

Задание 5: Даны координаты точек $A,B,C.$. Вычислить: $\angle\left((\vec{AB}-\vec{CB}),\vec{AB}\right)$;

Варианты для самостоятельной работы.

Вариант 1

1.1 $\vec{a}=\{1;+2;3\},\vec{b}=\{-3;0;-1\},\vec{c}_1=2\vec{a}-4\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}+\vec{b}.$

2.1 $\vec{a}=\{1;3;-1\},\vec{b}=\{3;-2;3\}.$

3.1 $\vec{a}=\{-2;3;+1\},\vec{b}=\{1;+1;-3\},\vec{c}=\{1;-9;1\}.$

4.1 $A(\alpha;-2;3),B(0;-1;2),C(3;-4;5).$

5.1 $A(-1;2;1),B(-1;3;-4),C(0;1;-2).$

Вариант 2

1.2 $\vec{a}=\{1;0;1\},\vec{b}=\{-2;3;5\},\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.2 $\vec{a}=\{2;1;4\},\vec{b}=\{4;1;3\}.$

3.2 $\vec{a}=\{3;-2;1\},\vec{b}=\{2;1;1\},\vec{c}=\{3;-1;-2\}.$

4.2 $A(0;-3;\alpha),B(-12;-3;-3),C(-9;-3;-6).$

5.2 $A(0;1;2),B(3;-1;2),C(-1;2;5).$

Вариант 3

1.3 $\vec{a}=\{-2;-4;1\},\vec{b}=\{1;2;-7\},\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b},\vec{c}_2=2\vec{a}+\vec{b}.$

2.3 $\vec{a}=\{0;1;2\},\vec{b}=\{1;3;-2\}.$

3.3 $\vec{a}=\{2;-1;2\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{3;-4;7\}.$

4.3 $A(3;\alpha;-1),B(5;5;-2),C(4;1;1).$

5.3 $A(0;2;3),B(3;1;2),C(1;5;1).$

Вариант 4

1.4 $\vec{a}=\{1;2;-3\},\vec{b}=\{2;-1;-1\},\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b},\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}.$

2.4 $\vec{a}=\{1;2;1\},\vec{b}=\{3;1;2\}.$

3.4 $\vec{a}=\{1;2;4\},\vec{b}=\{2;1;-5\},\vec{c}=\{1;-1;-1\}.$

4.4 $A(-1;2;\alpha), B(3;4;-6), C(1;1;-1).$

5.4 $A(1;0;3), B(1;4;1), C(0;2;3).$

Вариант 5

1.5 $\vec{a}=\{3;-5;4\}, \vec{b}=\{-5;9;-7\}, \vec{c}_1=-2\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}.$

2.5 $\vec{a}=\{2;1;7\}, \vec{b}=\{2;4;-3\}.$

3.5 $\vec{a}=\{2;-1;1\}, \vec{b}=\{1;2;3\}, \vec{c}=\{1;-3;-2\}.$

4.5 $A(-4;-2;0), B(\alpha;-2;4), C(3;-2;1).$

5.5 $A(1;1;0), B(4;1;2), C(1;2;3).$

Вариант 6

1.6 $\vec{a}=\{1;4;-2\}, \vec{b}=\{1;1;-1\}, \vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}.$

2.6 $\vec{a}=\{-4;1;5\}, \vec{b}=\{1;3;1\}.$

3.6 $\vec{a}=\{3;-1;2\}, \vec{b}=\{2;-1;-1\}, \vec{c}=\{4;-2;-2\}.$

4.6 $A(-5;3;-1), B(\alpha;-2;0), C(6;-4;1).$

5.6 $A(-1;4;2), B(5;2;3), C(0;1;2).$

Практическая работа № 6

Действия с комплексными числами

Время проведения – 2 час.

Цель работы: отработать навыки выполнения действий с комплексными числами; научиться решать квадратные уравнения, дискриминант которых отрицателен.

Вопросы для подготовки к работе:

1. Понятие мнимой единицы;
2. Понятие комплексного числа;
3. Равенство комплексных чисел;
4. Решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен;
5. Действие над комплексными числами в алгебраической форме;

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

При выполнении первого задания необходимо учитывать следующее: в комплексных числах можно извлечь квадратный корень из отрицательного числа, так как $i^2=-1$, где i - мнимая единица. Следовательно, в поле комплексных чисел разрешимо любое квадратное уравнение, в том числе с отрицательным дискриминантом.

Пример: Решить уравнение $z^2-4z+5=0$

Решение:

Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$, $D < 0$, следовательно, уравнение имеет мнимые корни, которые находят по формуле $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$$z_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

$$z_1 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

Ответ: $z_{1,2} = 2 \pm i$

Для выполнения второго, третьего заданий необходимо уметь применять операции над комплексными числами и знать правило равенства комплексных чисел.

Отметим, что с комплексными числами, записанными в алгебраической форме, операции сложения, вычитания и умножения можно производить также как с действительными биномами, деление выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю. Правило равенства: два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны коэффициенты мнимых частей.

<u>Пример:</u> Найдите сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - i$

Решение:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 - i) = 2 + i + 1 - i = 3$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (1 - i) = 2 + i - 1 + i = 1 + 2i$$

$z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (1 - i) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot i + i \cdot 1 - i \cdot i = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - i - (-1) = 3 - i$, где $i^2 = -1$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{1 - i} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1^2 - i^2} = \frac{2 + 3i - 1}{1 + 1} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Ответ: $z_1 + z_2 = 3$, $z_1 - z_2 = 1 + 2i$, $z_1 \cdot z_2 = 3 - i$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

<u>Пример</u>: Найдите действительные решения уравнения $(2 - i)x + (1 + i)y = -2 + 5i$

Решение:

$$(2 - i)x + (1 + i)y = -2 + 5i$$

$$2 \cdot x - i \cdot x + 1 \cdot y + i \cdot y = -2 + 5i$$

$$(2x + y) + (-x + y)i = -2 + 5i$$

В соответствии с правилом равенства получаем:

$$\begin{cases}2x+y=-2\\-x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=-2\\y=5+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5+x=-2\\y=5+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-2-5\\y=5+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-7\\y=5+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{7}{3}\\y=5-\dfrac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\dfrac{1}{3}\\y=5-2\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\dfrac{1}{3}\\y=2\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Ответ: $x=-2\dfrac{1}{3};\,y=2\dfrac{2}{3}$

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решить уравнение

1) $z^2+2z+5=0$

2) $z^2-2z+17=0$

3) $z^2+1=0$

4) $z^4+9z^2+20=0$

2. Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме

1) $(1+i)-(2-3i)$

2) $(3+2i)+(1+4i)$

3) $(2+3i)\cdot(3-i)$

4) $(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$

5) $\dfrac{2-i}{1+i}$

6) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$

7) $\dfrac{(1+2i)^3-(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$

3. Найти действительные решения уравнения

1) $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$

2) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$

Вариант 2

1. Решить уравнение

1) $4z^2-2z+1=0$

2) $z^2 - 2z + 5 = 0$

3) $z^2 + 4 = 0$

4) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$

2. Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме

1) $(1+i)+(2-3i)$

2) $(6+i)-(5+2i)$

3) $(4+5i)\cdot(1-i)$

4) $(1-i^3)^3-(1+i)^3$

5) $\frac{4+5i}{1-i}$

6) $\frac{1}{1+4i}-\frac{1}{4-i}$

7) $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}-(1-i)^{12}$

3. Найти действительные решения уравнения

1) $12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i$

2) $(2-i)x+(5+6i)y=1-3i$

Практическая работа № 7

Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Время проведения – 2 час.

Цель работы: отработать навыки геометрической интерпретации комплексного числа и представления комплексного числа в тригонометрической форме.

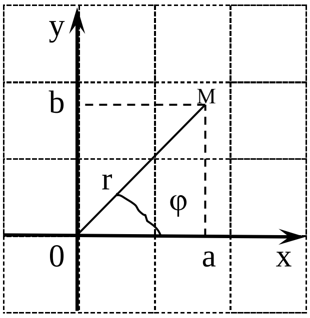
Вопросы для подготовки к работе:

1. Геометрическая интерпретация комплексного числа;
2. Тригонометрическая форма комплексного числа;

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Для выполнения заданий необходимо знать тригонометрическую форму записи комплексного числа и его геометрическую интерпретацию.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что каждому комплексному числу $z = a + bi$ ставится в соответствие точка $\mathrm{M}(a,b)$ координатной плоскости таким образом, что действительная часть комплексного числа представляет собой абсциссу (ось Ox называют действительной), а коэффициент при мнимой части – ординату точки (ось Oy называют мнимой).

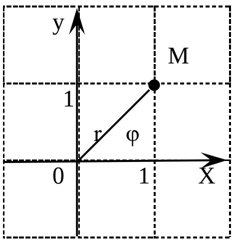


Расстояние r от начала системы координат до точки, соответствующей комплексному числу z, называют модулем этого числа, который вычисляют по формуле: $r=\sqrt{a^2+b^2}$. Угол φ между положительной полуосью Ox и лучом OM называют аргументом комплексного числа z. Выражение $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называют тригонометрической формой комплексного числа.

Пример: Изобразить на комплексной плоскости число $z=1+i$ и записать его в тригонометрической форме.

Решение:

Комплексному числу $z=1+i$ соответствует точка плоскости $M(1;1)$



Для комплексного числа $z=1+i$ имеем: $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $tg\varphi=1\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$ (по чертежу).

Поэтому в тригонометрической форме комплексное число имеет вид: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Ответ: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Примечание. Если вектор комплексного числа лежит во 2 четверти, то $\varphi=\pi-\alpha$; если вектор комплексного числа лежит во 3 четверти, то $\varphi=\pi+\alpha$; если вектор комплексного числа лежит во 4 четверти, то $\varphi=2\pi-\alpha$,

Задания для самостоятельного решения

Даны комплексные числа z_1 и z_2. Изобразить числа на комплексной плоскости и записать их в тригонометрической форме

1	$z_1=3+3i$ $z_2=-2+2\sqrt{3}i$	2	$z_1=-2+2\sqrt{3}i$ $z_2=-1+i$	3	$z_1=2-2i$ $z_2=\sqrt{3}-i$	4	$z_1=-\sqrt{3}-i$ $z_2=1-i$	5	$z_1=-1+i$ $z_2=-\sqrt{3}+i$
6	$z_1=1-\sqrt{3}i$ $z_2=2-2i$	7	$z_1=\sqrt{3}-i$ $z_2=3+3i$	8	$z_1=1-i$ $z_2=2-2\sqrt{3}i$	9	$z_1=-\sqrt{3}+i$ $z_2=-1+i$	10	$z_1=2-2\sqrt{3}i$ $z_2=\sqrt{3}-i$

Практическая работа № 8

Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: научиться вычислять пределы функций путем раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$; научиться вычислять пределы функций с помощью первого и второго замечательных пределов

Вопросы для подготовки к работе:

1. Понятие предела последовательности;
2. Понятие предела функции;
3. Бесконечно малые и бесконечно большие, связь между ними;
4. Свойства пределов функции;
5. Предел функции в точке;
6. Алгоритм раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$;
7. Алгоритм раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.
8. Первый замечательный предел;
9. Второй замечательный предел;

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Для выполнения первого задания, а именно, вычислить предел функции в какой-либо точке, необходимо подставить данную точку в функцию и получить числовое значение.

Пример: Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3}{x}$

Решение:

Подставляем $x=2$ в функцию $\frac{2x^2+3}{x}$ и находим значение выражения, т.е.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3}{x}=\frac{2\cdot 2^2+3}{2}=\frac{2\cdot 4+3}{2}=\frac{8+3}{2}=\frac{11}{2}=5{,}5$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3}{x}=5{,}5$

При выполнении третьего, шестого, восьмого заданий используется алгоритм раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$:

1) Выявление старшей степени переменной.
2) Деление на выявленную переменную как числителя, так и знаменателя.
3) Вычисление предела, учитывая, что величина обратная бесконечно большой величине есть бесконечно малая величина.

Пример: Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-7}{2+x+3x^2}$

Решение:

Подставляем бесконечность в функцию $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-7}{2+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}$ - это предел на неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Чтобы найти предел надо раскрыть неопределенность. Для этого сначала смотрим на числитель и находим x в старшей степени - старшая степень в числителе равна двум, затем смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени – старшая степень знаменателя равна двум. Выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя – в данном примере они совпадают и равны двойке. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени, т.е. разделим числитель и знаменатель на x^2. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-7}{2+x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+3x-7}{x^2}}{\dfrac{2+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+3}=\frac{1}{3}$$

Величины $\frac{3}{x}, \frac{7}{x^2}, \frac{2}{x^2}, \frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми при $x \to \infty$ и их пределы равны нулю.

Ответ: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x - 7}{2 + x + 3x^2} = \frac{1}{3}$

При выполнении второго, четвертого, пятого, седьмого заданий используется алгоритм раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

1) Разложение на множители числителя и знаменателя.
2) Сокращение дроби.
3) Вычисление значение предела

Перечислим наиболее распространенные приемы разложения многочленов на множители:

- Вынесение общего множителя за скобку.

В том случае, когда все члены многочлена имеют один и тот же общий множитель, его можно вынести за скобку, получая тем самым разложение многочлена

<u>Пример:</u> Разложить на множители многочлен $x^5 - 2x^3 + x^2$

Решение:

Каждое слагаемое этого многочлена содержит множитель x^2. Вынесем его за скобку и получим: $x^5 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^3 - 2x + 1\right)$

- Применение формул сокращенного умножения.

Полезно помнить следующие формулы:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

<u>Пример:</u> Разложить на множители многочлен $x^4 - 1$

Решение:

Разложим разность четвертых по формуле приведенной выше: $x^4 - 1 = \left(x^2\right)^2 - 1^2 = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = \left(x^2 - 1^2\right)\left(x^2 + 1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2 + 1\right)$

- Группировка.

Метод группировки слагаемых, как правило, применяется совместно с другими методами разложения на множители и чаще всего с методом вынесения за скобки. Суть метода состоит в том, что все слагаемые данного многочлена перегруппировываются таким образом, чтобы в каждой группе, возможно после вынесения общего множителя за скобки, образовалось бы одно и то же выражение. Это выражение можно также вынести за скобки как общий для всех групп множитель.

Пример: Разложить на множители $ab-2a-3b+6$

Решение:

$$ab-2a-3b+6=(ab-2a)+(-3b+6)=a(b-2)-3(b-2)=(b-2)(a-3)$$

- Разложение на множители квадратного трехчлена.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c раскладывается на два линейных множителя: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$ Таким образом, разложение на множители квадратного трехчлена сводится к решению квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где дискриминант $D=b^2-4ac, x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Пример: Разложить квадратный трехчлен $4x^2-5x+1$ на множители.

Решение:

Найдем корни квадратного уравнения $4x^2-5x+1$.

$a=4, b=-5, c=1$

Дискриминант уравнения равен $D=(-5)^2-4\cdot4\cdot1=25-16=9$, следовательно

$$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot4}=\frac{5+3}{8}=\frac{8}{8}=1$$

$$x_2=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\cdot4}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Таким образом, $4x^2-5x+1=4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x-1)(4x-1)$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Решение:

Подставляя единицу вместо x в числитель и знаменатель получим: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{1^2-3\cdot1+2}{1^2-1}=\frac{0}{0}$, то есть имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь.

Разложим выражения в числителе и знаменателе на множители.

Для того, чтобы разложить числитель на множители необходимо решить квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$a = 1, b = -3, c = 2$

Находим дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$, получаем: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

Далее находим корни по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ получаем: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Числитель на множители разложен.

Для того чтобы разложить знаменатель на множители используем формулу сокращенного умножения, а именно: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Получаем: $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$. Знаменатель на множители разложен.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$ Сократим данную дробь на скобку $(x-1)$:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)}{(x+1)}$ Теперь подставляем $x = 1$ в выражение, которое осталось под знаком предела: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)}{(x+1)} = \dfrac{1-2}{1+1} = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$

Итак, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{1-2}{1+1} = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$

Ответ: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = -0{,}5$

При выполнении девятого, десятого, одиннадцатого, пятнадцатого, шестнадцатого, семнадцатого, восемнадцатого, девятнадцатого заданий используется формула первого замечательного предела, а именно: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{3x}$

Решение:

Сначала подставляем $x=0$ в выражение, стоящее под знаком предела, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\dfrac{\sin 7\cdot 0}{3\cdot 0}=\dfrac{0}{0}$ - неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$. В подобных случаях используют искусственный прием – в знаменателе необходимо получить $7x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=1\div\frac{3}{7}=1\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=2\dfrac{1}{3}$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Решение:

Подставляем вместо x в функцию под знаком предела ноль, получаем: - неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Используем искусственный прием, чтобы при решении воспользоваться формулой первого замечательного предела. Степени представим в виде произведения (множителей), затем по аналогии с предыдущим примером в числителе получим $\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=20$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

Решение:

Подставляя в выражение под знаком предела значение $x=0$, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}=\dfrac{\sin 5\cdot 0}{\sin 3\cdot 0}=\dfrac{0}{0}$ - неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Используем искусственный прием, чтобы при решении воспользоваться формулой первого замечательного предела. Домножим числитель и знаменатель на аргументы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot \sin 5x\cdot 3x}{5x\cdot \sin 3x\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=1\frac{2}{3}$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2}$

Решение:

Подставляем в выражение под знаком предела значение $x=0$, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2}=\frac{1-\cos 4\cdot 0}{5\cdot 0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ - неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Следовательно, решение предела необходимо свести к формуле первого замечательного предела.

Используем тригонометрические формулы для преобразования выражения, стоящего под знаком предела, а именно, формулу двойного угла $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, получаем:

$$\cos 4x=\cos 2\cdot 2x=\cos^2 2x-\sin^2 2x\Rightarrow 1-\cos 4x=\cos^2 2x+\sin^2 2x-\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)=$$

$$=\cancel{\cos^2 2x}+\sin^2 2x-\cancel{\cos^2 2x}+\sin^2 2x=2\sin^2 2x$$

По аналогии с предыдущими примерами вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin 2x}{5x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin 2x}{5\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{2}{\frac{5}{4}}=2\div\frac{5}{4}=2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}=1{,}6$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2}=1{,}6$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot\left(1-\cos^2 2x\right)}{x}$

Решение:

Подставляем в выражение под знаком предела значение $x=0$, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot\left(1-\cos^2 2x\right)}{x}=\frac{ctg0\cdot\left(1-\cos^2 2\cdot 0\right)}{0}=\frac{\infty\cdot 0}{0}$ - неопределенность.

Используем тригонометрические формулы для преобразования выражения, стоящего под знаком предела, а именно: $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, затем с помощью искусственного разложения по аналогии с предыдущими примерами вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot\left(1-\cos^2 2x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 2x}{\sin x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 0\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{\sin x\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\sin x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{\sin x\cdot x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{\sin x\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=1\div\frac{1}{4}=4$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx\cdot\left(1-\cos^2 2x\right)}{x}$=4

При выполнении двенадцатого, тринадцатого, четырнадцатого заданий используется формула второго замечательного предела, а именно: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}$

Решение:

Подставим бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела. Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель $4x\to\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$ - неопределенность вида 1^{∞}, которая раскрывается с помощью формулы второго замечательного предела. Применяя искусственный способ, возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\dfrac{1}{3x}$,

получаем: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x}=e^{\frac{4}{3}}$

<u>Пример:</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Решение:

Подставляем бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ - неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Искусственно преобразуем основание степени, чтобы получить неопределенность 1^{∞} и применить для решения примера второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+1}{3}}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{x+1}{3}}\right)^{-\frac{x+1}{3}}\right)^{-\frac{3}{x+1}}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\boxed{\left(1+\frac{1}{-\frac{x+1}{3}}\right)^{-\frac{x+1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{x+1}\cdot(2x+3)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(2x+3)}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-9}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-6x}{x}+\frac{-9}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6-\frac{9}{x}}{1+\frac{1}{x}}}=e^{-6}$$, где величины $\frac{9}{x},\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$ и их пределы равны нулю.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=e^{-6}$

Если в формуле второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ сделать замену $t=\frac{1}{x}$, то формула перепишется в следующем виде: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ (следствие второго замечательного предела)

<u>Пример</u>: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{10}{x}}$

Решение:

Подставим число $x=0$ в выражение, стоящее под знаком предела. Нетрудно заметить, что при $x\to 0$ основание степени $(1+x)\to 1$, а показатель $\frac{10}{x}\to\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{10}{x}}=1^{\infty}$ - неопределенность вида 1^{∞}, которую можно раскрыть с помощью следствия второго замечательного предела: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{10}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{10}=e^{10}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{10}{x}}=e^{10}$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	*Вариант 2*
Вычислить:	Вычислить:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-4x+5\right)$	1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+1}{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x-3}$	2. $\lim\limits_{x\to \frac{9}{2}}\frac{81-4x^2}{9-2x}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{2x^2+2x-1}$	3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3-3x^2+4}{5x-x^2+7x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$	4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}$	5. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^4-625}{x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-4x+8}{x^3+2x^2-1}$	6. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3+8x-5}{x^4-3x^3+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2+x-5}{x^2-3x+2}$	7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{7x^4-x-118}{61+3x^3+2x^4}$	8. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{13x^2+x-14}{35+26x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x}$	9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 5x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2\frac{x}{3}}$	10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{5}}{x^2}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 10x}$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 11x}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{6x}$	12. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{8x}$
13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{5x}$	13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}$	14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{100\sin^2\frac{x}{5}}{x^2}$	15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{64\sin^2\frac{x}{4}}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 8x}$	16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 10x}{\sin 8x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x-3)}{(x-3)tg\dfrac{x-3}{2}}$ 19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx\cdot\left(1-\cos^2 3x\right)}{\left(x^2+5x\right)}$	17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^2}$ 19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx\cdot\left(1-\cos^2 4x\right)}{\left(x^2+5x\right)}$

Практическая работа № 9

Нахождение производной функций. Нахождение производной сложной функции.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: закрепить умения находить производные функций, используя формулы дифференцирования; овладеть навыками нахождения производных сложных функций

Вопросы для подготовки к работе:

1. Понятие производной;
2. Понятие сложной функции;
3. Дифференцируемость функции;
4. Формулы дифференцирования;
5. Правила дифференцирования;
6. Формула производной сложной функции;

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Для выполнения с первого по одиннадцатым заданиям практической работы – нахождение производных, необходимо использовать правила и формулы дифференцирования.

Правила дифференцирования:

1) Постоянное число можно вынести за знак производной:

$(cu)'=cu'$, где c - постоянное число (константа)

2) Производная суммы/разности равна сумме/разности производных:

$(u\pm v)'=u'\pm v'$

3) Производная произведения:

$(uv)' = u'v + uv'$

4) Производная частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Формулы дифференцирования:

1) $c' = 0$, где c - постоянное число (константа)

2) $x' = 1$

3) $(x^n)' = nx^{n-1}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $(e^x)' = e^x$

7) $(a^x)' = a^x \ln a$

8) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

10) $(\sin x)' = \cos x$

11) $(\cos x)' = -\sin x$

12) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13) $(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Пример: Найти производную функции $y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx$

Решение:

Первое действие состоит в том, что мы заключаем в скобки все выражение и ставим знак производной – штрих: $y' = (6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx)'$

Для нахождения производной применяем второе правило, затем все корни, степени представляем в виде 1 $x^{\frac{a}{b}}$, а если они находятся в знаменателе, то переносим в числитель, при этом меняем знак у степени, применяем первое правило дифференцирования и в заключении, получив элементарные функции под знаком производной, находим таковые по формулам дифференцирования:

$$y' = (6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx)' = (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)' + (x^{-2})' - (11ctgx)' =$$

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$$

Ответ: $y' = 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$

Пример: Найти производную функции $y = (x-5)(2x-5)$

Решение:

Всё выражение представляет собой произведение двух функций, зависящих от x ($u = (x-5); v = (2x-5)$), поэтому сначала применяем правило дифференцирования произведения (правило 3), далее применяем правило дифференцирования суммы, и наконец, пользуясь формулами дифференцирования, находим производную данной нам функции:

$$y' = ((x-5)(2x-5))' = (x-5)'(2x-5) + (x-5)(2x-5)' = \left((x)' - (5)'\right)(2x-5) + (x-5)\left((2x)' - (5)'\right) =$$

$$= (1-0)(2x-5) + (x-5)(2-0) = 1\cdot(2x-5) + (x-5)\cdot 2 = 2x - 5 + 2x - 10 = 4x - 15$$

Ответ: $y' = 4x - 15$

Пример: Найти производную функции $y = \frac{x-5}{2x-5}$

Решение:

Всё выражение представляет собой частное двух функций, зависящих от x ($u = (x-5); v = (2x-5)$). Применяем формулу дифференцирования частного (правило 4), далее применяем правило дифференцирования суммы, и наконец, пользуясь формулами дифференцирования, находим производную данной нам функции:

$$y' = \left(\frac{x-5}{2x-5}\right)' = \frac{(x-5)'(2x-5) - (x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2} = \frac{\left((x)' - (5)'\right)(2x-5) - (x-5)\left((2x)' - (5)'\right)}{(2x-5)^2} =$$

$$= \frac{(1-0)(2x-5) - (x-5)(2-0)}{(2x-5)^2} = \frac{2x - 5 - 2x + 10}{(2x-5)^2} = \frac{5}{(2x-5)^2}$$

Ответ: $y' = \frac{5}{(2x-5)^2}$

При выполнении с двенадцатого по двадцать пятое заданий практической работы, необходимо использовать правила и формулы дифференцирования, а также формулу для нахождения производной сложной функции.

Формула производной сложной функции: $f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, где $y(x)= f(\varphi(x))$ - сложная функция (функция f - внешняя, функция φ - внутренняя).

<u>Пример:</u> Найдите производную сложной функции $y=\sin(3x-5)$

Решение:

Функция $y=\sin(3x-5)$ - сложная, причем многочлен $(3x-5)$ является внутренней функцией, $\sin(3x-5)$ - внешней функцией. Применяем формулу производной сложной функции, затем, пользуясь правилом сложения/вычитания и формулами дифференцирования находим окончательный результат:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\sin'(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot\left((3x)'-(5)'\right)=\cos(3x-5)(3-0)=$$
$$=3\cos(3x-5)$$

Ответ: $y'=3\cos(3x-5)$

<u>Пример:</u> Найдите производную сложной функции $y=(2x+1)^5$

Решение: Функция $y=(2x+1)^5$ - сложная функция, причем многочлен $(2x+1)$ является внутренней функцией, $(2x+1)^5$ - внешней функцией. Применяем формулу производной сложной функции, затем, пользуясь правилом сложения/вычитания и формулами дифференцирования находим окончательный результат:

$$y'=\left((2x+1)^5\right)'=5\cdot(2x+1)^{5-1}(2x+1)'=5\cdot(2x+1)^4\left((2x)'+(1)'\right)=5\cdot(2x+1)^4(2+0)=10(2x+1)^4$$

Ответ: $y'=10(2x+1)^4$

<u>Пример:</u> Найдите производную сложной функции $y=\sqrt[3]{x^2+tgx+15}$

Решение:

Во-первых, представим корень, стоящий в функции, в виде степени:

$$y=\sqrt[3]{x^2+tgx+15}=\left(x^2+tgx+15\right)^{\frac{1}{3}}$$

Анализируя функцию, получаем, что сумма трех слагаемых $\left(x^2+tgx+15\right)$ - это внутренняя функция, а возведение в степень $\left(x^2+tgx+15\right)^{\frac{1}{3}}$ - внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции, а затем пользуемся соответствующими правилами и формулами нахождения производной:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}\right)' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\left(x^2\right)' + (tgx)' + (15)'\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{2\sqrt[3]{\left(x^2 + tgx + 15\right)^2}}\left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{\left(x^2 + tgx + 15\right)^2}}\left(2x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	*Вариант 2*
Найдите производную функции	Найдите производную функции
1. $y = x^2 - 7x$	1. $y = -3x^2 - 13x$
2. $y = \sqrt{x} - 9x^2$	2. $y = 12x + \sqrt{x}$
3. $y = \dfrac{1}{x} + 4x$	3. $y = -2x^2 - \dfrac{1}{x}$
4. $y = -2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$	4. $y = 6\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$
5. $y = x^3 + 2x^5$	5. $y = x^4 - x^9$
6. $y = x^7 - 4x^{16} - 3$	6. $y = x^5 + 9x^{20} + 1$
7. $y = \left(x^2 - 1\right)\left(x^4 + 2\right)$	7. $y = \left(x^2 + 3\right)\left(x^6 - 1\right)$
8. $y = \sqrt{x}\left(x^3 + 1\right)$	8. $y = \sqrt{x(2x - 4)}$
9. $y = \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)(2x - 3)$	9. $y = \left(7 - \dfrac{1}{x}\right)(6x + 1)$
10. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$	10. $y = \dfrac{x^3}{2x + 4}$
11. $y = \dfrac{x^9 - 3}{x^3}$	11. $y = \dfrac{x^{15}}{x^{10} + 1}$
12. $y = (4x - 9)^7$	12. $y = (5x + 1)^9$
13. $y = \left(\dfrac{x}{4} - 3\right)^{14}$	13. $y = \left(\dfrac{x}{3} + 2\right)^{12}$
14. $y = (7 - 24x)^{10}$	14. $y = (15 - 9x)^{13}$
15. $y = \sin(3x - 9)$	15. $y = \sin(7 - 2x)$
16. $y = \cos(5x + 9)$	16. $y = \cos(9x - 10)$

17. $y = tg\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$	17. $y = tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
18. $y = ctg\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$	18. $y = ctg\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$
19. $y = \sqrt{4 + 9x}$	19. $y = \sqrt{15 - 7x}$
20. $y = \sqrt{42 + 0{,}5x}$	20. $y = \sqrt{50 - 0{,}2x}$
21. $y = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$	21. $y = \cos^2 3x + \sin^2 3x$
22. $y = -\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$	22. $y = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
23. $y = \sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x$	23. $y = \cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x$
24. $y = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{4x}{5} - \sin\frac{x}{5}\sin\frac{4x}{5}$	24. $y = \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + \cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$
25. $y = \log_2^3 tgx^4$	25. $y = \sin(\ln^3 arctg(2x))$

Практическая работа № 10

Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: отработка умений и навыков выполнения приближенных вычислений с помощью дифференциала.

Вопросы для подготовки к работе:

1 Дайте определение дифференциала функции.

2 В чем заключается геометрический смысл дифференциала?

Основные теоретические сведения и примеры решения

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = f(x)$ в точке x.

План решения. Если приращение $\Delta x = x - x_0$ аргумента x мало по абсолютной величине, то

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (1)$$

1. Выбираем точку x_0, ближайшую к x и такую, чтобы легко вычислялись значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

2. Вычисляем $\Delta x = x - x_0$, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

3. По формуле (1) вычисляем $f(x)$.

Пример 1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y=\sqrt{x^3},\quad x=0{,}98$.

В нашем случае:

$x_0=1$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $\Delta x=0{,}98-1=-0{,}02$.

Вычисляем:

$f(x_0)=f(1)=1$;

$f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$, $f'(1)=\dfrac{3\cdot 1}{2}=1{,}5$.

Имеем:

$\sqrt{0{,}98^3}\approx 1+1{,}5\cdot(-0{,}02)=0{,}97$

Пример 2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y=\sqrt{x^2+5}$ в точке x=1,97.

Решение:

Ближайшая к 1,97 точка, где легко вычислить значение функции и ее производной это 2.

Вычисляем:

$$\Delta x=x-a=1{,}97-2=-0{,}03$$
$$f(a)=f(2)=3$$
$$f^{|}(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$
$$f^{|}(a)=f^{|}(2)=\frac{2}{3}$$

Далее по формуле $f(x)=f(a+\Delta x)\approx f(a)+f^{|}(a)\Delta x$ получаем:

$$f(1{,}97)\approx 3+\frac{2}{3}(-0{,}03)=2{,}98$$

Пример 3. Дана степенная функция $y=x^n$. Зафиксируем точку x_0 и применим полученную выше формулу:

$$\left(x_0+\Delta x\right)^n\approx x_0^n+nx_0^{n-1}\Delta x.$$

Например,

2,00017 = (2 + 0.0001)7 ≈ 27 + 7 · 26 · 0,0001 = 128 + 0,0448 = 128,0448 = =128,04

Ту же формулу можно применить и для приближенного вычисления корней, учитывая, что $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Получим $\sqrt[n]{(x+\Delta x)} = (x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx x_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta x.$

Например,

$$\sqrt{0,999} = (1-0,001)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,001 = 0,9995;$$

$$\sqrt[3]{27,0003} = (27+0,0003)^{\frac{1}{3}} \approx 27^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,0003 =$$

$$= 3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot 0,0003 = 3,00001 \pm 0,00001.$$

Полезно запомнить формулы

при $x_0 = 1$: $(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x; \quad \sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n}\Delta x.$

Задания для самостоятельной работы

Вариант	**№ заданий**
1	1,5,15,20,32
2	2,6,16,21,33
3	3,7,17,22,34
4	4,8,18,23,38
5	5,9,19,24,39
6	6,10,25,35,40
7	7,11,26,36,41
8	8,12,27,37

Задание 1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции *y* в заданной точке *x*.

1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$	2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012.$

3. $y=\left(x+\sqrt{5-x^2}\right)\Big/2,\quad x=0,98.$	4. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=27,54.$
5. $y=\arcsin x,\quad x=0,08.$	6. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\quad x=0,97.$
7. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=26,46.$	8. $y=\sqrt{x^2+x+3},\quad x=1,97.$
9. $y=x^{11},\quad x=1,021.$	10. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=1,21.$
11. $y=x^{21},\quad x=0,998.$	12. $y=\sqrt[3]{x^2},\quad x=1,03.$
13. $y=x^6,\quad x=2,01.$	14. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=8,24.$
15. $y=x^7,\quad x=1,996.$	16. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=7,64.$
17. $y=\sqrt{4x-1},\quad x=2,56.$	18. $y=1\Big/\sqrt{2x^2+x+1},\quad x=1,016.$
19. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=8,36.$	20. $y=1\Big/\sqrt{x},\quad x=4,16.$
21. $y=x^7,\quad x=2,002.$	22. $y=\sqrt{4x-3},\quad x=1,78.$
23. $y=\sqrt{x^3},\quad x=0,98.$	24. $y=x^5,\quad x=2,997.$
25. $y=\sqrt[5]{x^2},\quad x=1,03.$	26. $y=x^4,\quad x=3,998.$
27. $y=\sqrt{1+x+\sin x},\quad x=0,01.$	28. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\quad x=0,01.$
29. $y=\sqrt[4]{2x-\sin\left(\pi x/2\right)},\quad x=1,02.$	30. $y=\sqrt{x^2+5},\quad x=1,97.$
31. $y=1\Big/\sqrt{2x+1},\quad x=1,58.$	

Задание 2. Вычислить приближенное значение $\sqrt[n]{a}$, заменяя приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом.

32. n=3, a=125,93	37. n=4, a=255,16

33.	n=5, a=242,05	38.	n=3, a=124,07
34.	n=4, a=256,96	39.	n=5, a=243,95
35.	n=3, a=216,99	40.	n=4, a= 81,84
36.	n=5, a= 32,85	41.	n=3, a=215,04

Практическая работа № 11

Нахождение асимптот функции. Построение графиков функций.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: закрепить умения находить асимптоты функций.

Вопросы для подготовки к работе:

7. Понятие асимптоты графика функции;
8. Виды асимптот;
9. Понятие вертикальной асимптоты;
10. Понятие наклонной асимптоты;
11. Формулы для нахождения асимптот;

Основные теоретические сведения и примеры решения

При выполнении заданий работы для нахождения асимптот используем следующие формулы: если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой; если прямая $y=kx+b$ - наклонная асимптота функции $y=f(x)$, то $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

Пример: Найдите асимптоты функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ и постройте ее график.

Решение:

Найдем вертикальные асимптоты.

$x^2-1\neq 0$ (знаменатель данной нам функции не может принимать значение ноль)

$x^2=1$

$x=\pm 1$

По определению вертикальной асимптоты, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой.

Итак, $\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{1}{(\pm1)^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{1}{0}=\infty$, следовательно, прямые $x=\pm1$ - вертикальные асимптоты.

Найдем наклонные асимптоты. При этом используем следующее правило: если прямая $y=kx+b$ - наклонная асимптота функции $y=f(x)$, то $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

Получаем:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3-x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$$

Итак, $y=0\cdot x+0\Rightarrow y=0$ - наклонная (горизонтальная) асимптота

Построим в одной прямоугольной системе координат графики найденных асимптот и график данной функции.

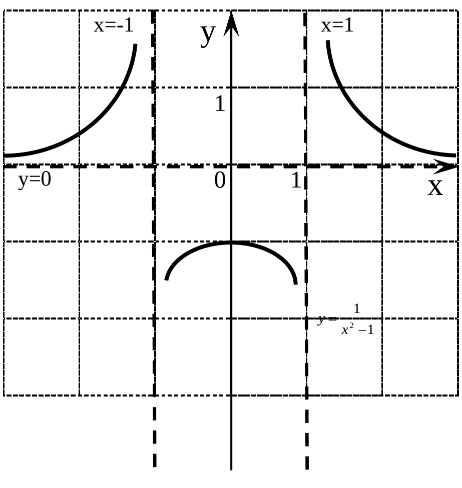
$y=0$ - графиком является ось Ox;

$x=1$ - графиком является прямая, проходящая через точку с координатами $(1;0)$ параллельно оси Oy;

$x=-1$ - графиком является прямая, проходящая через точку с координатами $(-1;0)$ параллельно оси Oy

Для построения графика функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ составим таблицу

x	-3	-2	-0,5	0	0,5	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-1	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$



Самостоятельная работа

Вариант 1	*Вариант 2*
Найти асимптоты функций и построить их графики 1. $y=\frac{1}{2-x}$ 2. $y=\frac{1}{x^2-9}$ 3. $y=\frac{2x^2-x+3}{x-1}$ 4. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$	Найти асимптоты функций и построить их графики 1. $y=\frac{1}{x-3}$ 2. $y=\frac{1}{9-x^2}$ 3. $y=\frac{17-x^2}{4x-5}$ 4. $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$

Практическая работа № 12

Вычисление неопределенных интегралов методом подстановки и методом интегрирования по частям.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: закрепить умения вычисления неопределенных интегралов методом подстановки и методом интегрирования по частям

Вопросы для подготовки к работе:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.

Основные теоретические сведения и примеры решения

Задания для самостоятельного решения

Неопределенные интегралы

Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x)+C$.

В этом равенстве $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением.*

Свойства неопределенных интегралов

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$; 5. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

3. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$;

Таблица простейших интегралов

1. $\int 0du = C$,	6. $\int \cos u du = \sin u + C$,
2. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq 1$,	7. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$,
2а. $\int du = u + C$,	8. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$,
2б. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$,	9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$,
2в. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$,	10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$,
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$,	11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$,
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$,	12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$,
4а. $\int e^u du = e^u + C$,	13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$,
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$,	14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$.

Примеры решения интегралов различными методами

Метод непосредственного интегрирования

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Возможны случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией (по членное деление, приведение к виду степенной функции, использование известных тождеств) и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти $\int\left(2x^3-\frac{4}{x}+\frac{1}{3}e^x\right)dx$.

Последовательно применим к данному интегралу свойства 3 и 4, а затем воспользуемся таблицей основных интегралов:

$$\int\left(2x^3-\frac{4}{x}+\frac{1}{3}e^x\right)dx=\int 2x^3dx-\int\frac{4dx}{x}+\int\frac{1}{3}e^xdx=$$

$$=2\int x^3dx-4\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int e^xdx=2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-4\ln|x|+\frac{1}{3}e^x+C=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}-4\ln|x|+\frac{1}{3}e^x+C=\frac{x^4}{2}-4\ln|x|+\frac{1}{3}e^x+C.$$

Пример 2. Найти $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{\sqrt{x}}-3^x\right)dx.$

$$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{\sqrt{x}}-3^x\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int 3^x\,dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+6\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{3^x}{\ln 3}+C=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+12\sqrt{x}-\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt{x}-\frac{3^x}{\ln 3}+C.$$

Интегрирование методом подстановки

Вычислить заданный интеграл непосредственным интегрированием удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. Одним из наиболее эффективных приемов является метод подстановки или замены переменной интегрирования. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Пример 1. Найти $\int(3x-5)^7dx$.

Решение:

$$\int (3x-5)^7 dx = \left[\begin{array}{l} t = 3x-5;\ 3x = t+5 \\ x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{5}{3} \\ dx = \left(\dfrac{t}{3} + \dfrac{5}{3}\right)' dt = \dfrac{1}{3} dt \end{array} \right] = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^7 dt =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{24}t^8 + C = \frac{1}{24}(3x-5)^8 + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sin(2-8x)dx$

$$\int \sin(2-8x)dx = \left[\begin{array}{c} 2-8x = t, -8x = t-2 \\ x = \dfrac{t-2}{-8} = -\dfrac{1}{8}t + \dfrac{2}{8} \\ dx = \left(-\dfrac{1}{8}t + \dfrac{2}{8}\right)' = -\dfrac{1}{8}dt \end{array} \right] = \int \sin t \times \left(-\frac{1}{8}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{8}\int \sin t dt = \frac{1}{8}\cos t = \frac{1}{8}\cos(2-8x) + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{2\sqrt{4+3x}}$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{4+3x}} = \left[\begin{array}{ll} \quad 4+3x = t & 3x = t-4 \\ x = \dfrac{t-4}{3} = \dfrac{t}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}t - \dfrac{4}{3} & \\ \quad dx = \left(\dfrac{1}{3}t - \dfrac{4}{3}\right)' = \dfrac{1}{3}dt & \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\sqrt{t}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{4+3x} + C$$

Метод интегрирования по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедлива формула

$$\int u dv = uv - \int v du \cdot$$

Данную формулу интегрирования применяют обычно в тех случаях, когда функция $u(x)$ упрощается при дифференцировании, а первообразная для функции $v(x)$ легко находится.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

а) $\int (5+4x)\cos 8x\, dx,$ **б)** $\int \ln(3x+2)\, dx \cdot$

Решение. а) При вычислении первого интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int (5+4x)\cos 8x \quad dx = \begin{vmatrix} u = 5+4x & du = 4dx \\ dv = \cos 8x dx & v = \frac{1}{8}\sin 8x \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(5+4x)\sin 8x - \frac{4}{8}\int \sin 8x dx =$$

$$= \frac{1}{8}(5+4x)\sin 8x + \frac{\cos 8x}{16} + C \cdot$$

б) При вычислении второго интеграла также воспользуемся формулой интегрирования по частям. В результате получим

$$\int \ln(3x+2) \quad dx = \begin{vmatrix} u = \ln(3x+2) & du = \dfrac{3dx}{3x+2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2} dx =$$

$$= x\ln(3x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{3x+2}\right) dx = x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln(3x+2) + C \cdot$$

Задания для самостоятельной работы

Задание. Вычислите интегралы, используя указанные методы

№ варианта	***Непосредственное интегрирование***	***Метод подстановки***	***Метод интегрирования по частям***
1	$\int \left(2-3e^x+x\right)dx$	$\int \dfrac{2dx}{\sqrt{5x-2}}$	$\int x\ln x \, dx$
	$\int \left(5x^5-\cos x-1\right)dx$	$\int \cos 3x \, dx$	$\int (x+1)e^x \, dx$
	$\int \left(7x^6-\sin x+3\right)dx$	$\int (2-3x)^7 \, dx$	$\int \arcsin x \, dx$
2	$\int \left(7-\dfrac{1}{\cos^2 x}-x^2\right)dx$	$\int \sin(3-2x)\,dx$	$\int x\sin x \, dx$
	$\int \left(x^4-\dfrac{1}{2x}-4\right)dx$	$\int (2-7x)^3 \, dx$	$\int arctgx \, dx$
	$\int \left(3-\dfrac{1}{\sin^2 x}+2\right)dx$	$\int \cos(4x-1)\,dx$	$\int 3x\cdot\ln x \, dx$
3	$\int \left(3x^2-\dfrac{2}{1+x^2}+5\right)dx$	$\int (6x-1)^{10} \, dx$	$\int \dfrac{5}{7}x\cos x \, dx$
	$\int \left(2\cos x-5x^4+3\right)dx$	$\int \sqrt{x+4} \, dx$	$\int \dfrac{3}{2}xe^x \, dx$
	$\int \left(5e^x-x^3-4\right)dx$	$\int \sin 7x \, dx$	$\int 3x\sin 5x \, dx$
4	$\int \left(5x^4-\dfrac{1}{3x}+4\right)dx$	$\int \sqrt{1+e^x}\cdot e^x \, dx$	$\int \dfrac{1}{3}x\sin 5x \, dx$
	$\int \left(1+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right)dx$	$\int \sqrt{3-2x} \, dx$	$\int (x-1)\ln x \, dx$
	$\int \left(\sqrt{x}-2x+\sqrt{x^3}\right)dx$	$\int \sin(1-3x)\,dx$	$\int (x+3)e^{2x} \, dx$

5	$\int\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}+1\right)dx$	$\int\frac{dx}{\sqrt{4+x}}$	$\int x\sin 2x\,dx$
	$\int\left(x^5-\frac{4}{x}+\cos x\right)dx$	$\int\frac{dx}{5-3x}$	$\int x\ln 4x\,dx$
	$\int\left(2\sin x+\frac{3}{x}-1\right)dx$	$\int\cos(1-3x)$	$\int x\cos 3x\,dx$

Практическая работа № 13

Вычисление определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: отработать навыки вычисления определенных интегралов;

Вопросы для подготовки к работе:

1. Определенный интеграл и его свойства;
2. Формула Ньютона-Лейбница

Содержание работы:

1. Вычисление определенного интеграла;
2. Замена переменной в определенном интеграле.

Основные теоретические сведения и примеры решения

Для вычисления определенного интеграла от функции *f(x)* служит *формула Ньютона-Лейбница:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

1⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если a = const, то

$$\int_a^b a\,f(x)\,dx = a\int_a^b f(x)\,dx$$

2⁰. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

3⁰. Если a < c < b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4^0. Если функция *f(x)* неотрицательна на отрезке [a; b], где a < b, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, нужно:

1) найти какую-нибудь первообразную *F(x)* для функции *f(x)* (найти неопределенный интеграл от функции *f(x)*, в котором можно принять $C = 0$);

2) в полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел a, а затем нижний предел b, и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)\,dx$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница получаем: $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)\,dx =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 7\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + 7\cdot(-1)\right) = \ 19,5$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$

$$arctg\,x\Big|_0^1 = arctg\,1 - arctg\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

При вычислении определенного интеграла методом подстановки новая переменная вводится подобно случаю неопределенного интеграла. Однако в отличие от неопределенного интеграл а, где в полученном результате мы снова возвращались к прежнему переменному, здесь этого делать не надо.

Пример 3. Вычислить $\int_1^2 (2x-1)^3\,dx$

Решение. Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $2x-1=t$. Дифференцируя, имеем:

$$d(2x-1)=dt,$$
$$(2x-1)'\,dx=dt,$$
$$2dx=dt \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$$

Находим новые пределы интегрирования. Для этого подставим в соотношение $2x-1=t$ значения $x = 1$ и $x = 2$, соответственно получим: $t_н=2\cdot1-1=1$, $t_в=2\cdot2-1=3$

Следовательно,

$$\int_1^2 (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 t^3\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4\Big|_1^3=\frac{1}{8}(3^4-1^4)=\frac{80}{8}=10$$

Задания для самостоятельной работы

1.Вычислить определенный интеграл методом непосредственного интегрирования

1. $a)\int_1^2 \left(3x^2-2x\right)dx$
2. $\int_2^3 (1-x)^4\,dx$
3. $\int_1^2 \left(4x^3-3x^2\right)dx$
4. $\int_{-2}^1 \left(x^2-x\right)dx$
5. $\int_{-1}^1 (7-5x)\,dx$
6. $\int_1^0 (1-2x)^4\,dx$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной

$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2dx}$

2. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$
3. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
6. $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

Практическая работа № 14

Вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.

Время проведения – 4 часа.

Цель работы: отработать навыки вычисления площадей плоских фигур и вычисления объёмов тел вращения

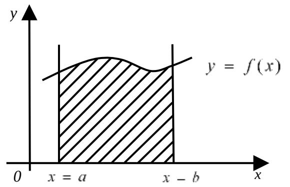
Вопросы для подготовки к работе:

1. Геометрический смысл определенного интеграла;
2. Понятие площади криволинейной трапеции;
3. Применение определенного интеграла для нахождения площадей плоских фигур
4. Применение определенного интеграла для вычисления объёмов тел вращения

Основные теоретические сведения и примеры решения

Вычисление площадей плоских фигур

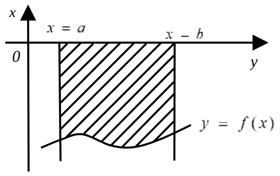
Площадь криволинейной трапеции (рис.1) с основанием на оси ох вычисляется по формуле



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 1.

Если $f(x) < 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена ниже оси ох (рис.2), то её площадь вычисляется по формуле

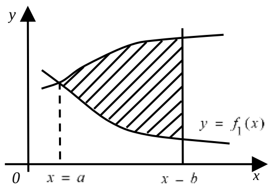


$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Рис. 2.

Если для всех $x \in [a;b]$ выполняется условие $f_2(x) \geq f_1(x)$, т.е. $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, то площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (рис.3), вычисляется по формуле

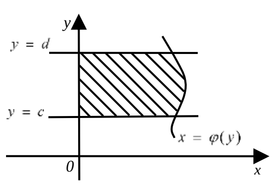
$y = f_2(x)$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Рис. 3.

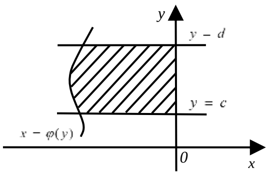
Площадь криволинейной трапеции с основанием на оси оу (рис.4) вычисляется по формуле:



$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 4.

Если $\varphi(y) < 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена левее оси оу (рис.5), то её площадь вычисляют по формуле



$$S=-\int_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 5.

Если для всех $y\in[c;d]$ выполняется условие $\varphi_2(y)\geq\varphi_1(y)$, т.е. $\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $x=\varphi_2(y)$, $x=\varphi_1(y)$ и прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$ (рис.6), вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

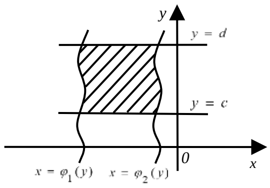


Рис. 6.

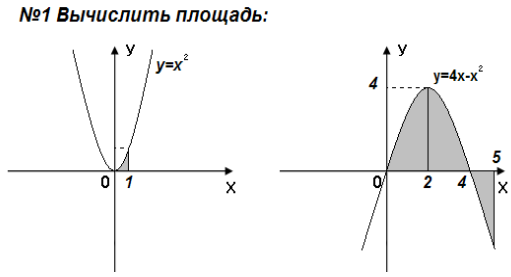
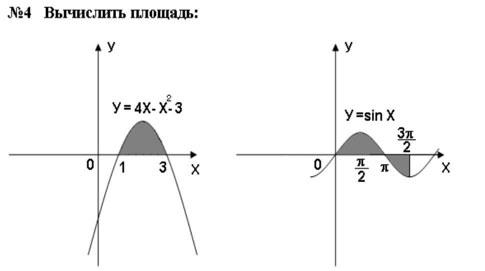
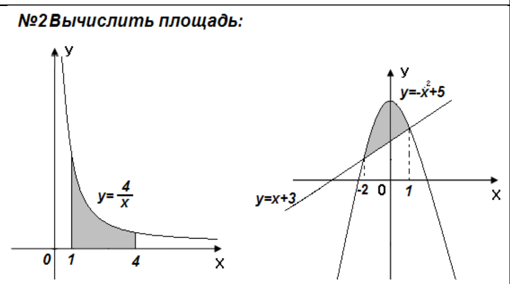
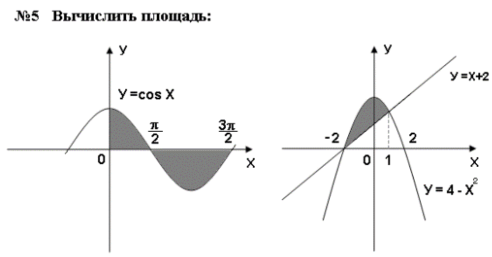
Вычисление объёмов тел вращения

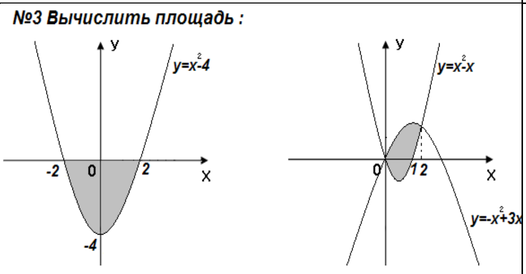
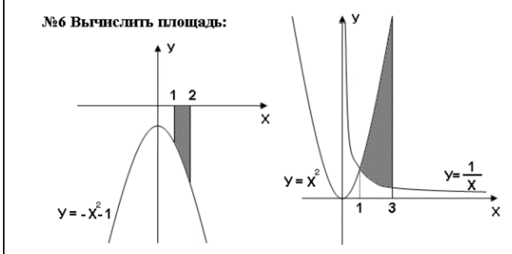
Объём тела, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$, отрезком оси абсцисс $a\leq x\leq b$ и прямыми $x=a, x=b$, вычисляется по формуле $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $x=\varphi(y)$, отрезком оси ординат $c\leq y\leq d$ и прямыми $y=c, y=d$, вычисляется по формуле $V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$

Задания для самостоятельной работы

Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.		4.з	
2.		5.	

3.		6.	

Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

7.	$y = x^3, x = -2, x = 1, y = 0.$	10.	$y = x + 3, y = x^2 + 1.$
8.	$y = 2x - x^2, y = x.$	11.	$y = x^2, x = 1, x = 3, y = 0.$
9.	$x = \sqrt{y}, y = 1, y = 4, x = 0.$	12.	$y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x.$

Задание: **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:**

13.	$y = -x^2 + 8x - 16;$ $y = x^2 - 4x.$	16.	$y = -1{,}5x^2 + 9x - 7{,}5,$ $y = -x^2 + 6x - 5$
14.	$y = x^2,$ $y = 2 - x^2$	17.	$y = x^2 - 4x + 6,$ $y = 4x - x^2.$
15.	$y = -x^2 + 2x + 3;$ $y = x^2 - 6x - 7.$	18.	$y = x^2 - 2x + 2;$ $y = -x^2 + 4x + 2.$

Задание: Вычислить объем тела:

19.	Полученного при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми $x = 3, x$=12 и осью абсцисс.	20.	Образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leq x \leq \pi$ оси абсцисс.

Задание: Решить задачу:

21.	Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 4t^3 - 2t + 1$ км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения.	22.	Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 3 + 3t^2$км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения.
23.	Найти путь, пройденный поездом за 10-ю секунду, зная, что скорость прямолинейного движения выражается формулой $V(t) = t^2 + 4t - 2$км/ч	24.	Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 3t^2 + t + 1$км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения.
25.	Найти путь, пройденный поездом за 4-ю секунду, зная, что скорость прямолинейного движения выражается формулой $V(t) = 3t^2 - 2t - 3$км/ч	26.	Скорость движения изменяется по закону $V(t) = 2t$ км/ч. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Практическая работа № 15

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: отработать навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными переменными и с разделяющимися переменными.

Основные теоретические сведения и примеры решения

Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Общий вид такого уравнения

$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dx = 0,$

где $X(x), X_1(x)$ – функции только от x, $Y(y), Y_1(y)$ – функции только от y.

Поделив обе части уравнения на произведение $X_1(x)Y(y) \neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0 \qquad (1)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C \qquad (2)$$

Замечание. Если произведение $X_1(x)Y(y)$ при $x = a$ и $y = b$, то эти функции при $x = a$ и $y = b$ являются решениями дифференциального уравнения при условии, что при этих значениях x и y уравнение не теряет числового смысла. Геометрически эти решения представляют собой прямые, параллельные осям координат.

Пример 1. $(5 + x)dy - ydx = 0;$ *при x=4 и y=7*

Алгоритм	Решение
1. Найдем общее решение ДУ.	$(5 + x)dy - ydx = 0$ /: (5+x)*y $\frac{(5+x)dy}{(5+x)*y} - \frac{ydx}{(5+x)*y} = 0$ $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{5+x} = 0$ $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{5+x}$

	$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{5+x}$ $ln\|y\| = ln\|5+x\| + lnC$ $y = (5+x) \times C$ – общее решение ДУ
2. Найдем частное решение ДУ при *x=4* и *y=7*	$y = (5+x) \times C$ – общее решение ДУ $7 = (5+4) \times C$ $C = \frac{7}{9}$ $y = (5+x) \times \frac{7}{9}$ - частное решение ДУ

Пример 2. $y' = \frac{\cos 3x}{ctgy}$; *при x =0 y=*$\frac{\pi}{2}$

Алгоритм	Решение
1. Найдем общее решение ДУ.	$y' = \frac{\cos 3x}{ctgy}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 3x}{ctgy}$ $cos3xdx = ctgydy$ $\int cos3xdx = \int ctgydy$ $\frac{1}{3}sin3x + C = \int \frac{cosydy}{siny}$ $\frac{1}{3}sin3x + C = \int \frac{d(siny)}{siny}$ $\frac{1}{3}sin3x + C = ln\|siny\|$ - общее решение ДУ
2. Найдем частное решение ДУ *при x=0 и y=* $\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}sin3 \times 0 + C = ln\left\|sin\frac{\pi}{2}\right\|$ $0 + C = ln1$ *C=0* $\frac{1}{3}sin3x = ln\|siny\|$ - частное решение ДУ

Пример 3. $(x-5)y' - 2y - 3 = 0$ *при* $x = 6 y = \frac{1}{2}$

Алгоритм	Решение

1. Найдем общее решение ДУ.	$(x-5)y' - 2y - 3 = 0$ $(x-5)\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$ $(x-5)\frac{dy}{dx} = 2y + 3$ $(x-5)\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{(x-5)(2y+3)} = 2y - 3 \times \frac{dx}{(x-5)(2y+3)}$ $\frac{dy}{2y+3} = \frac{dx}{x-5}$ $\frac{1}{2} ln\|2y+3\| = ln\|x-5\| + lnC$ $\sqrt{2y+3} = (x-5) \times C$ - общее решение ДУ
2. Найдем частное решение ДУ *при x=6 и y=*$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2 \times \frac{1}{2} + 3} = (6-5) \times C$ $\sqrt{4} = C = 2$ $\sqrt{2y+3} = (x-5) \times 2$ - частное решение ДУ

Задания для самостоятельной работы

Задание: Найдите решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = Y(y)X(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Вариант № 1

1. $4xydx - (x^2+1)dy = 0;$ *при x=1 и y=4*

2. $y^2dx - e^x dy = 0;$ *при x=0 и y=1*

3. $(1-y)dx + (1+x)dy = 0;$ *при y(1)=3*

4. $y\sin xdx + \cos xdy = 0;$ *при* $x = \frac{\pi}{3}$ $y = \frac{1}{2}$

Вариант № 2

1. $\frac{dy}{x-1} - \frac{dx}{y-2} = 0;$ *при x=0 и y=4*

2. $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$*; y(3)=0*

3. $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0;$ *при y=0 и x=0*

4. $y' = (2y+1)ctgx;$ *при* $y = (\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

Вариант № 3

1. $\frac{dy}{x^2} - \frac{dx}{y^2} = 0;$ *при x=0 и y=2*

2. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0;$ *y(-2)=3*

3. $ytgxdx + dy = 0;$ *при y=4 и* $x = (\frac{\pi}{3})$

4. $x^2 y' \sqrt{x} = y;$ *при* $y(4) = 1$

Практическая работа № 16

Решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: отработать навыки решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка

Основные теоретические сведения и примеры решения

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

где p и q – некоторые числа.

Если $f(x) = 0$, то дифференциальное уравнение называется линейным *однородным.* Оно имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (3)$$

Справедлива ***теорема***: если y_1 и y_2 *– частные решения уравнения* (3), *причем* $y_1/y_2 \neq$ *const, то функция* $y = C_1y_1 + C_2y_2$, *где* C_1 *и* C_2 *– произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.*

Решением данного дифференциального уравнения (3) должна быть такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение, превратит его в тождество. Левая часть уравнения представляет собой сумму функции y и ее производных y' и y'', взятых с некоторыми постоянными коэффициентами. Чтобы такая сумма обратилась в нуль, надо, чтобы y, y' и y'' были подобны между собой.

Такой функцией является функция $y = e^{kx}$, где k – постоянная. Требуется подобрать k так, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению (3).

Так как $y' = e^{kx}(kx)' = ke^{kx}$, а $y'' = ke^{kx}(kx)' = k^2e^{kx}$, то, подставляя эти значения y, y' и y'' в левую часть уравнения (2), получим

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Сокращая на множитель e^{kx}, не обращающийся в нуль, получим *характеристическое уравнение*

$$\boldsymbol{k^2 + pk + q = 0.} \tag{4}$$

Это уравнение определяет те значения k, при которых функция $y = e^{kx}$ является решением дифференциального уравнения (3).

При решении характеристического уравнения (4) возможны три случая:

Корни уравнения	***Частные решения***	***Общее решение***
Действительные различные ($k_1 \neq k_2$)	$y_1 = e^{k_1x}$ $y_2 = e^{k_2x}$	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
Действительные равные ($k_1 = k_2$)	$y_1 = e^{k_1x}$ $y_2 = xe^{k_1x}$	$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$
Комплексно-сопряженные ($\alpha \pm \beta i$)	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

<u>Пример 1.</u> Найдите общее решение ДУ 2-го однородного порядка: $y'' + 8y' + 15y = 0$

Алгоритм	Решение
1. Решим характеристическое уравнение	$k^2+8k+15=0$ D=4 $k_1=-3$, $k_2=-5$
2. Используя таблицу, запишем общее решение уравнения	Так как дискриминант больше нуля и корни уравнения различны, то общее решение исходного уравнения имеет вид: $Y= C_1e^{-3x}+C_2e^{-5x}$

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1: Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка

1 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

2. 1) $y'' + 2y' + 10y = 0$ 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

3 1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ 2) $y'' + 12y' + 36y = 0$

4 1) $y'' + 8y' + 15y = 0$ 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

Задание 2: Найти частные решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

.1 $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 20y = 0$, если $y(0) = \frac{9}{5}$, $y'(0) = 0$

3 $y'' - 6y' + 13y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

.4 $y'' - 4y' + 13y = 0$, если $y(\frac{\pi}{3}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{3}) = -6$

Практическая работа № 17

Решение задач на расчёт вероятности событий.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: отработать навыки решения задач на расчёт вероятности событий.

Основные теоретические сведения и примеры решения задач

1. В урне Н билетов. Из них М выигрышных. Какова вероятность того, что первый вытянутый билет окажется выигрышным?

Решение:

Пусть А – событие, означающее, что первый вытянутый билет выигрышный.

Н – общее количество всех возможных исходов.

М – количество исходов, благоприятствующих наступлению события А.

Р(А) – вероятность наступления события А. Тогда Р(А)=М/Н.

2. Биатлонист стреляет по мишени. Мишень – круг радиуса R см. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 1. Попадание в любую точку равновероятно. Необходимо попасть в круг радиуса r см.

Решение:

А - попадание в круг радиуса r см. $S_r=\pi r^2$. $S_R=\pi R^2$. $P(A)=S_r/S_R$

3. Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. Все Н томов расставляются на книжной полке случайным образом. Какова вероятность, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания?

Решение:

А – вероятность того, что тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

Все тома можно расставить на полке m=Н! способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда Р(А)=n/Н!.

4. Имеется собрание сочинений из Н томов некоего автора. На полке умещается только М томов (М меньше Н). Эти тома берут из Н случайным способом. Какова вероятность, что выбранные М томов расположатся в порядке возрастания или убывания?

Решение:

А – вероятность того, что выбранные тома расположатся в порядке возрастания или убывания.

М томов из Н томов можно выбрать C_H^M способами. Только в двух случаях тома расположатся либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания. Значит, n=2. Тогда P(A)=2/C_H^M.

5. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается ,что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p1, p2, p3. Какова вероятность того, что:

1) все три выстрела окажутся успешными;

2) хотя бы одни выстрел окажется успешным;

3) точно один выстрел окажется успешным, два выстрела окажутся успешными?

Решение:

1) А – все три выстрела окажутся успешными

P(A)=p1*p2*p3

2) Н - хотя бы одни выстрел окажется успешным 1-p_i – вероятность промаха каждого стрелка

P(H) =1-(1-p1)(1-p2)(1-p3)

3) В – только один выстрел окажется успешным

P(B)=p1*(1-p2)*(1-p3)+(1-p1)*p2*(1-p3)+(1-p1)*(1-p2)*p3

С - два выстрела окажутся успешными

P(c)=p1*p2*(1-p3)+(1-p1)*p2*p3+p1*(1-p2)*p3

6. Футболист бьет Н раз пенальти. Вероятность забить при одном ударе равна р. Какова вероятность, что будет забито 3 пенальти?

Решение:

Пусть А – событие, означающее, что будет забито 3 пенальти. Так вероятность забить при одном пенальти постоянна, то воспользуемся формулой Бернулли.

Тогда P(A)=$C_H^3 \times p^3 \times (1-p)^{H-3}$

7. Случайная величина Х задана рядом распределения:

Xi	*-3*	*0*	*1*	*4*
Pi	P1	P2	P3	P4

Найти математическое ожидание MX, дисперсию DX и среднеквадратическое отклонение σ.

Решение:

MX=x1p1+x2p2+x3p3+x4p4

$DX = x1^2 p1 + x2^2 p2 + x3^2 p3 + x4^2 p4 - (MX)^2$

$\sigma = \sqrt{DX}.$

Задания для самостоятельной работы

Формулировки задач смотри в примерах решения задач.

Номер задачи																
	1		**2**		**3**	**4**		**5**			**6**		**7**			
	Н	**М**	**R**	**r**	**Н**	**Н**	**М**	**P1**	**P2**	**P3**	**Н**	**p**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
1	10	1	5	1	3	5	3	0,1	0,2	0,3	5	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
2	11	2	6	2	4	6	4	0,4	0,5	0,1	4	0,2	0,1	0,2	0,2	0,5
3	12	3	7	3	5	7	5	0,3	0,2	0,4	7	0,3	0,2	0,4	0,1	0,3
4	13	4	8	4	6	8	6	0,9	0,8	0,7	6	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2
5	14	5	9	5	7	9	7	0,5	0,6	0,3	5	0,5	0,6	0,1	0,2	0,1
6	15	6	10	6	8	10	8	0,2	0,3	0,4	8	0,6	0,4	0,4	0,1	0,1
7	16	7	11	7	9	11	9	0,2	0,3	0,5	5	0,7	0,2	0,2	0,3	0,3
8	17	8	12	8	10	12	10	0,7	0,8	0,6	6	0,8	0,1	0,2	0,3	0,4
9	18	9	13	9	3	13	3	0,1	0,5	0,7	8	0,9	0,5	0,3	0,1	0,1
10	19	10	14	10	4	14	4	0,2	0,3	0,4	7	0,1	0,1	0,2	0,2	0,5
11	20	1	5	3	5	8	6	0,6	0,7	0,8	9	0,2	0,2	0,2	0,4	0,2
12	21	2	6	4	6	9	7	0,3	0,4	0,5	5	0,3	0,5	0,3	0,1	0,1
13	22	3	7	5	7	10	7	0,3	0,5	0,7	6	0,4	0,6	0,1	0,1	0,2
14	23	4	8	6	8	11	9	0,5	0,1	0,2	7	0,5	0,2	0,1	0,5	0,2
15	24	5	9	7	9	12	10	0,3	0,4	0,9	4	0,6	0,5	0,1	0,2	0,2
16	25	6	10	8	10	13	3	0,2	0,4	0,8	6	0,7	0,1	0,2	0,3	0,4

17	26	7	11	9	3	14	4	0,9	0,8	0,7	7	0,8	0,3	0,2	0,1	0,4
18	27	8	12	10	4	8	4	0,4	0,7	0,6	8	0,9	0,1	0,2	0,3	0,4
19	28	9	13	3	5	9	6	0,2	0,6	0,7	5	0,1	0,6	0,1	0,1	0,2
20	29	10	14	4	6	10	7	0,1	0,6	0,4	6	0,2	0,5	0,3	0,1	0,1
21	30	1	5	3	7	11	8	0,4	0,2	0,6	7	0,3	0,3	0,1	0,2	0,4
22	31	2	6	4	8	12	9	0,1	0,3	0,6	8	0,4	0,1	0,2	0,3	0,4
23	32	3	7	5	9	13	10	0,4	0,6	0,6	5	0,5	0,5	0,2	0,1	0,2
24	33	4	8	6	10	14	3	0,3	0,6	0,1	4	0,6	0,2	0,2	0,1	0,5
25	34	5	9	7	5	9	4	0,6	0,1	0,1	6	0,7	0,1	0,2	0,2	0,5
26	35	6	10	3	6	10	6	0,3	0,7	0,9	7	0,8	0,6	0,2	0,1	0,1
27	36	7	11	4	7	11	7	0,4	0,4	01	4	0,9	0,4	0,1	0,3	0,2
28	37	8	12	5	8	12	8	0,4	0,9	0,8	8	0,1	0,1	0,2	0,2	0,5
29	38	9	13	6	9	13	9	0,3	0,7	0,9	6	0,2	0,1	0,3	0,2	0,4
30	39	10	14	7	10	14	10	0,9	0,7	0,7	7	0,3	0,1	0,2	0,3	0,4

Практическая работа № 18

Расчёт математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Время проведения – 2 часа.

Цель работы: овладеть навыком вычисления математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Основные теоретические сведения и примеры решения задач

К числу важных числовых характеристик дискретной случайной величины относится математическое ожидание и дисперсия.

Определение: ***Математическим ожиданием M(X)***дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X)=\sum x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.

<u>Свойства математического ожидания:</u>

1)M(C)=C, где C-постоянная величина;

2)M(C•X)=C•M(X),

3)M(X±Y)=M(X) ±M(Y);

4)M(X•Y)=M(X) •M(Y), где X,Y- независимые случайные величины;

5)M(X±C)=M(X)±C, где C-постоянная величина;

Для характеристики степени рассеивания возможных значений дискретной случайной величины вокруг ее среднего значения служит дисперсия.

<u>Определение</u> **:*Дисперсией D(X)***случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

<u>Свойства дисперсии:</u>

1)D(C)=0, где C-постоянная величина;

2)D(X)>0, где X- случайная величина;

3)$D(C•X)=C^2•D(X)$, где C-постоянная величина;

4)D(X+Y)=D(X)+D(Y), где X,Y- независимые случайные величины;

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$

где $M(X)=\sum x_i^2 p_{i=} x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_{n,}\ ^{i=1}$

Дисперсия D(X) имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния возможных значений случайной величины используют также величину $\sqrt{D(X)}$.

<u>Определение:</u> ***Средним квадратичным отклонением σ(X)*** случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)= \sqrt{D(X)}$$

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Найдем среднее арифметическое для чисел 5,24, 6,97, 8,56, 7,32 и 6,23.

a=5,24+6,97+8,56+7,32+6,235=6.864a¯=5,24+6,97+8,56+7,32+6,235=6.864

Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Размах ряда 5,24, 6,97, 8,56, 7,32, 6,23 равен 8,56-5,24=**3.32**

Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.

Ряд чисел может иметь более одной моды, а может не иметь моды совсем.

Модой ряда 32, 26, 18, 26, 15, 21, 26 является число **26**, встречается 3 раза.

В ряду чисел 5,24, 6,97, 8,56, 7,32 и 6,23 моды нет.

Ряд 1, 1, 2, 2, 3 содержит 2 моды: 1 и 2.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

*Пример 1.*Случайная величина *X* задана рядом распределения:

x i	0	1	2	3	4
p i	0 .5	0 .3	0. 15	0. 03	0. 02

Вычислить математическое ожидание случайной величины

Решение

Математическое ожидание находим по формуле $m = \sum x_i p_i$.

Математическое ожидание M(X);

M(X) = 0*0.5 + 1*0.3 + 2*0.15 + 3*0.03 + 4*0.02 = 0.77

Ответ: 0,77

*Пример 2***.**

Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание M(X):

M(X) = 2*0,1 + 3*0,6+5*0,3= 3,5

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математические ожидания $M(X^2)$:

$M(X^2) = 4*0,1 + 9*0,6 + 25*0,3 = 13,3$

Искомая дисперсия

$D(X) = M(X^2)-(M(X))^2 = 13,3 – (3,5)^2 = 1,05$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Дискретная случайная величина имеет ряд распределения Найти математическое ожидание и дисперсию.

X i	6	8	1 0	1 8	2 1
P i	0. 1	0. 2	0. 1	0. 3	0. 4

Задания 2. Дискретная случайная величина имеет ряд распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

	3	9	12	17	23
	0, 124	0, 243	0, 283	0, 198	0, 467

Задания 3.

Задан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти неизвестную вероятность p, математическое ожидание M и дисперсию, построить многоугольник распределения

x	0, 3	0, 4	0, 7	0, 9	0, 2
p	0, 1	0, 3	p	0, 4	0, 1

Задания 4.

Найти p2 и p4, если p4 в 6 раз больше p2, если задана дискретная случайная величина X и имеется закон распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

x	2	6	7	9	3
p	0, 12	P 2	0, 25	P 4	0, 41

Задания 5.

Выигрыши, которые приходятся на один билет в каждой из двух лотерей, имеют следующие законы распределения. Какой из лотерей вы отдадите предпочтение? Найти математическое ожидание и дисперсию

x	12	25	31	17
p	0,9	0,06	0,03	0,01

y	12	25	31	17
p	0,85	0,12	0,02	0,01

Критерии оценки за выполнение практической работы:

Оценка «5» - правильное выполнение не менее 90% заданий практической работы.
Оценка «4» - правильное выполнение 80-89% заданий практической работы.
Оценка «3» - правильное выполнение 70-79% заданий практической работы.
Оценка «2» - правильное выполнение менее 70% заданий практической работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Методические указания
по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся

№ п/п	Содержание самостоятельных работ	Количество часов
1	**Самостоятельная работа №1** Решение простейших матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений в матричной форме	2
2	**Самостоятельная работа №2** Применение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических задач	2
3	**Самостоятельная работа №3** Построение графиков функций	2
	Всего	**6**

Самостоятельная работа № 1
Решение простейших матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений в матричной форме

Раздел 1. Линейная алгебра.
Тема: **Решение систем линейных уравнений в матричной форме**
Количество часов: 2
Цель работы: овладеть навыком решения систем линейных уравнений в матричной форме.
Методические указания по выполнению.
1. Прочитать справочный материал.
2. Разобрать решение примера.
3. Выполнить задания самостоятельно.
4. Оформить решение задач в тетради.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица **с определителем, не равным нулю.**

Тогда существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(c_{ij}\right) = \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathrm{A}}\right).$$

Последняя формула означает, что **в** i**-й строке и** j**-м столбце** обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего **в** j**-й строке и в** i**-м** столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$, где M_{pq} называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя det**A** вычеркиванием p-й строки и q-го столбца.

Пример. Дана матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $\mathbf{A}^{-1}$.

№	Алгоритм	Конкретное действие
1	Вычислим определитель матрицы A.	Det$A$ = 20 + 6 – 24 = 2
2	Найдем алгебраические дополнения матрицы A.	$A_{11} = 20,\quad A_{12} = -9,\quad A_{13} = -15,$ $A_{21} = -8,\quad A_{22} = 4,\quad A_{23} = 6,$ $A_{31} = 2,\quad A_{32} = -1,\quad A_{33} = -1;$
3	Построим обратную матрицу по формуле $\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathrm{A}}\right)$.	$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 20 & -8 & 2 \\ -9 & 4 & -1 \\ -15 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $\quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$.

Сделаем следующее преобразование: $\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$,

т.к. $\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}$, то $\mathrm{E} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$, $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = \text{-}25 - 10 + 5 = \text{-}30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{-}5; \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \text{-}1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$
$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30}; A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$
$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25 + 10 - 5 & 5 + 14 - 19 & 5 - 16 + 11 \\ 5 - 20 + 15 & 1 - 28 + 57 & 1 + 32 - 33 \\ 20 - 30 + 10 & 4 - 42 + 38 & 4 + 48 - 22 \end{pmatrix}$$

$=E$.

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Выполнить задания самостоятельно.

Вариант 1	Вариант 2
1. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -x+2y+z=7 \\ 3x-y+6z=19 \\ -4x+3y-z=8 \end{cases}$	1. $\begin{cases} 5x+y-3z=-2 \\ 4x+3y+2z=16 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 3x-y+2z=1 \\ 4x-y+5z=10 \end{cases}$

Форма контроля: письменный отчет в тетради.

Критерии оценки за самостоятельную работу:
Оценка «5» - правильное выполнение не менее 90% заданий самостоятельной работы.
Оценка «4» - правильное выполнение 80-89% заданий самостоятельной работы.
Оценка «3» - правильное выполнение 70-79% заданий самостоятельной работы.
Оценка «2» - правильное выполнение менее 70% заданий самостоятельной работы.

Самостоятельная работа № 2
Применение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических задач.

Раздел 7. Аналитическая геометрия
Тема: **Векторы. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов**
Количество часов: 2
Цель работы: овладеть навыком применения скалярного, векторного и смешанного произведения векторов для решения геометрических задач

Методические указания по выполнению.

1. Разобрать решение примера.
2. Выполнить задания самостоятельно.
3. Оформить решение задач в тетради.

Решение типового варианта индивидуальной самостоятельной работы.
Задание : Даны координаты вершин пирамиды:

$$A(1;4;3), B(2;3;1), C(-2;1;3), D(0;1;2).$$

Вычислить:

1. объем пирамиды;
2. длину ребра AB;
3. площадь грани ABC;

Решение:

1. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, а объем параллелепипеда вычисляется на основании геометрического смысла смешанного произведения $\Rightarrow$ объем параллелипипеда, построенного на векторах как на ребрах равен:

$V = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|, \vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}, \vec{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\}, \vec{c} = \left\{c_x; c_y; c_z\right\},$

Найдем проекции соответствующих векторов на оси координат:

$\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\},\ \vec{AC}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\},$

$\vec{AD}=\{0-1;1-4;2-3\}=\{-1;-3;-1\},$

Тогда объем пирамиды равен:

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right|$$

Вычислим объем по указанной формуле:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|3+0-18+6-0+3\right|=\frac{1}{6}\left|-6\right|=1;$$

2. Длина ребра

$AB=\left|\vec{AB}\right|\Rightarrow\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}\Rightarrow$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$; (смотри пункт 5,3)

3. Площадь грани ABC вычисляется по формуле:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\|$ так как грань $ABC-$ треугольник, а площадь треугольника можно вычислить как половину площади параллелограмма, а площадь параллелограмма равна длине векторного произведения векторов, на которых построен параллелограмм на основании свойств векторного произведения $\Rightarrow$ найдем проекции векторов на оси координат:

$\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\},\ \vec{AC}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\}$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}\right|\quad=\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

Задание для индивидуальной самостоятельной работы

Задание : Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB ;
3) площадь грани ABC;

Варианты для индивидуальной самостоятельной работы.

Вариант 1

1.1 $A(1;-1;1),B(-1;2;-4),C(2;0;-6),D(-2;5;1).$

Вариант 2

1.2 $A(0;5;0),B(2;3;-4),C(0;0;6),D(-3;1;-1).$

Вариант 3

1.3 $A(0;0;6),B(4;0;-4),C(1;3;-1),D(4;-1;-3).$

Вариант 4

1.4 $A(-5;6;-1),B(6;-5;2),C(6;5;1),D(0;0;2).$

Вариант 5

1.5 $A(2;-5;3),B(3;2;-5),C(5;-3;-2),D(-5;3;-2).$

Вариант 6

1.6 $A(6;0;4),B(0;6;4),C(4;6;0),D(0;-6;4).$

Вариант 7

1.7 $A(3;2;4), B(2;4;3), C(4;3;-2), D(-4;-2;-3)$.

Вариант 8

1.8 $A(6;3;5), B(5;-6;3), C(3;5;6), D(-6;-1;2)$.

Вариант 9

1.9 $A(5;-2;-1), B(4;0;0), C(2;5;1), D(1;2;5)$.

Вариант 10

1.10 $A(4;2;5), B(3;0;4), C(0;2;3), D(5;-2;-4)$.

Вариант 11

1.11 $A(4;2;5), B(-3;0;4), C(0;2;3), D(5;2;-4)$.

Вариант 12

1.12 $A(4;4;10), B(7;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9)$.

Вариант 13

1.13 $A(4;6;5), B(6;9;4), C(2;10;10), D(7;5;9)$.

Вариант 14

1.14 $A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;3), D(4;7;8)$.

Вариант 15

1.15 $A(10;6;5), B(-2;8;4), C(6;8;9), D(7;10;3)$.

Вариант 16

1.16 $A(1;8;2), B(5;2;6), C(5;7;4), D(4;10;9)$.

Вариант 17

1.17 $A(6;6;5), B(4;9;5), C(4;6;11), D(5;9;3)$.

Вариант 18

1.18 $A(-3;2;1), B(3;1;-6), C(1;-4;3), D(5;-1;3)$.

Вариант 19

1.19 $A(8;6;4), B(10;5;5), C(5;6;8), D(8;10;-7)$.

Вариант 20

1.20 $A(7;7;3), B(6;5;8), C(3;6;7), D(8;4;1)$.

Вариант 21

1.21 $A(4;0;0), B(-2;1;2), C(1;3;2), D(3;2;7)$.

Вариант 22

1.22 $A(-2;1;2), B(4;0;1), C(3;2;7), D(1;3;2)$.

Вариант 23

1.23 $A(1;3;2), B(3;2;7), C(4;0;1), D(-2;1;-2)$.

Вариант 24

1.24 $A(3;2;7), B(1;3;2), C(-2;1;3), D(4;-2;3)$.

Вариант 25

1.25 $A(3;1;-2), B(1;-2;1), C(-2;1;0), D(2;2;5)$.

Форма контроля: письменный отчет в тетради.

Критерии оценки за самостоятельную работу:

Оценка «5» - правильное выполнение не менее 90% заданий самостоятельной работы.

Оценка «4» - правильное выполнение 80-89% заданий самостоятельной работы.

Оценка «3» - правильное выполнение 70-79% заданий самостоятельной работы.
Оценка «2» - правильное выполнение менее 70% заданий самостоятельной работы.

Самостоятельная работа № 3
Построение графиков функций

Раздел 4. Дифференциальное исчисление
Тема: **Исследование функций и построение графиков**
Количество часов: 2
Цель работы: овладеть навыком построения графиков функций.
Методические указания по выполнению.

1. Разобрать решение примера.
2. Выполнить задания самостоятельно.
3. Оформить решение задач в тетради.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий:

При выполнении работы необходимо провести полное исследование функции по следующей схеме:

1) Найти область определения функции – множество всех значений x, для которых функция имеет смысл.

2) Найти область значения функции – множество всех значений функции (часто этот пункт пропускают или заполняют после полного исследования и построения графика)

3) Исследовать поведение функции на границе области определения (иногда говорят: исследовать функцию на непрерывность), находят $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

4) Найти вертикальные асимптоты (смотреть практическую работу № 2)

5) Найти наклонные (горизонтальные) асимптоты

6) Найти точки пересечения с осью Ox (то есть $f(x) = 0$).

7) Найти точки пересечения с осью Oy (то есть $y = f(0)$).

8) Выяснить является ли функция четной, нечетной (проверяется по определению)

9) Найти промежутки монотонности (промежутки возрастания, убывания) функции – находится производная функции, приравнивается к нулю, найденные точки выставляются на числовой прямой, к ним добавляются те точки, в которых производная не определена; на промежутках находятся знаки производной, где производная положительна – функция возрастает, где отрицательна – там убывает.

10) Найти экстремумы функции – точки, в которых происходит смена знака производной и есть точки экстремума (где производная с плюса меняется на минус – точка максимума, а где с минуса на плюс – точка минимума).

11) Найти промежутки выпуклости функции: находится вторая производная, где вторая производная меньше нуля – функция выпукла вверх, а где больше – выпукла вниз.

12) Найти точки перегиба графика функции – точки, в которых вторая производная меняет знак.

13) Составить сводную таблицу (при необходимости находят дополнительные точки)

14) Построение асимптот и графика функции

<u>Пример:</u> Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение:

Проведем полное исследование функции по выше указанной схеме:

1) Найдем область определения функции. Знаменатель не может принимать нулевое значение, то есть

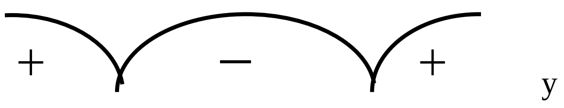
$$4x^2 - 1 \neq 0$$
$$4x^2 \neq 1$$
$$x^2 \neq \frac{1}{4}$$
$$x \neq \pm\frac{1}{2}$$

Следовательно, $D(y) = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

2) Найдем область значения функции.

$$y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$$
$$\frac{y}{1} = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$$
$$4yx^2 - y = x^2$$
$$x^2 - 4yx^2 + y = 0$$
$$x^2(1 - 4y) + y = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1 - 4y)y = -4y + 16y^2$$
$$D \geq 0 \Rightarrow -4y + 16y^2 \geq 0$$

Найдем корни: $-4y + 16y^2 = 0 \Rightarrow 4y(-1 + 4y) = 0 \Rightarrow y = 0$ или $-1 + 4y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}$



$0 \qquad \dfrac{1}{4}$

Так как знак неравенства "≥", то выбираем промежутки со знаком "+", получаем

$$E(y) = (-\infty;0] \cup \left[\frac{1}{4};+\infty\right)$$

3) Исследуем поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{4}$$ (по аналогии)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{\frac{1}{4}}{(1+2\cdot 0-1)(1+2\cdot 0+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{\frac{1}{4}}{(-0)\cdot(2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{\frac{1}{4}}{(-1+2\cdot 0-1)(-1+2\cdot 0+1)} = \frac{\frac{1}{4}}{(-2)\cdot(+0)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^2}{4x^2-1} = \frac{\frac{1}{4}}{(-2)\cdot(-0)} = +\infty$$

4) Найдем вертикальные асимптоты (смотреть практическую работу № 2).

Знаменатель дроби не может принимать значение ноль:

$4x^2 - 1 \neq 0$

$4x^2 \neq 1$

$x^2 \neq \dfrac{1}{4}$

$x \neq \pm\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}\dfrac{x^2}{4x^2-1} = \infty \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$ - вертикальные асимптоты

5) Найдем наклонные асимптоты (смотреть практическую работу № 2).

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{4x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{4}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{4x^2-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{4}$$

$y=kx+b\Rightarrow y=0\cdot x+\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}$ - наклонная (горизонтальная) асимптота

6) Найдем точки пересечения с осью Ox (y приравниваем к нулю).

$$\frac{x^2}{4x^2-1}=0$$

$$4x^2-1\neq 0\Rightarrow x\neq\pm\frac{1}{2}$$

$$x^2=0\Rightarrow x=0$$

Точка с координатами $(0;0)$ - пересечение с осью Ox.

7) Найдем точки пересечения с осью Oy (x приравниваем к нулю).

$$y=\frac{0^2}{4\cdot 0^2-1}=0$$

Точка с координатами $(0;0)$ - пересечение с осью Oy.

8) Исследуем функцию на четность и нечетность:

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{4(-x)^2-1}=\frac{x^2}{4x^2-1}=f(x)$, следовательно функция четная и при построении симметрична относительно оси Oy.

9) Исследуем функцию на монотонность.

Найдем производную функции:

$$y'=\left(\frac{x^2}{4x^2-1}\right)'=\frac{(x^2)'(4x^2-1)-x^2(4x^2-1)'}{(4x^2-1)^2}=\frac{2x(4x^2-1)-x^2\cdot 4\cdot 2x}{(4x^2-1)^2}=\frac{8x^3-2x-8x^3}{(4x^2-1)^2}=$$
$$=\frac{-2x}{(4x^2-1)^2}$$

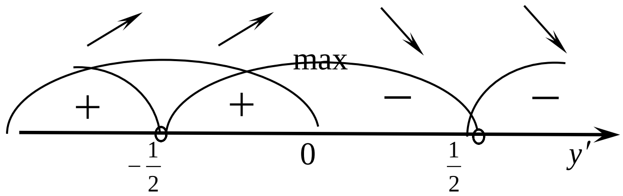
Приравняем производную к нулю и найдем корни уравнения:

$y' = 0$

$$\frac{-2x}{\left(4x^2-1\right)^2} = 0$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\left(4x^2-1\right)^2 \neq 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow 4x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$ (кратные корни - в них знак не меняется)



На промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};0\right)$ - функция возрастает.

На промежутке $\left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ - функция убывает.

10) $x_{\max} = 0$, $y_{\max} = \frac{0^2}{4 \cdot 0^2 - 1} = 0$

11) Исследуем функцию на выпуклость.

Найдем вторую производную

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{-2x}{\left(4x^2-1\right)^2}\right)' = \left(\frac{-2x}{16x^4 - 8x^2 + 1}\right)' = \frac{(-2x)'\left(16x^4 - 8x^2 + 1\right) - (-2x)\left(16x^4 - 8x^2 + 1\right)}{\left(16x^4 - 8x^2 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\left(16x^4 - 8x^2 + 1\right) - (-2x)\left(16 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 2x\right)}{\left(4x^2-1\right)^4} = \frac{-32x^4 + 16x^2 - 2 + 128x^4 - 32x^2}{\left(4x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{96x^4 - 16x^2 - 2}{\left(4x^2-1\right)^4}$$

Приравняем вторую производную к нулю и найдем корни уравнения

$y'' = 0$

$$\frac{96x^4 - 16x^2 - 2}{\left(4x^2-1\right)^4} = 0$$

$\left(4x^2-1\right)^4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$

$96x^4 - 16x^2 - 2 = 0$ разделим обе части уравнения на 2

$48x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

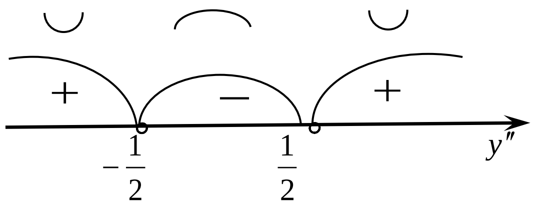
Решим биквадратное уравнение, сделав замену: $x^2 = t$

$48t^2 - 8t - 1 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 48 \cdot (-1) = 64 + 4 \cdot 48 = 256$

$t_1 = \frac{8+16}{2 \cdot 48} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{8-16}{2 \cdot 48} = -\frac{1}{12} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{12}$ - нет решений в действительных числах



На промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ - функция выпукла вниз.

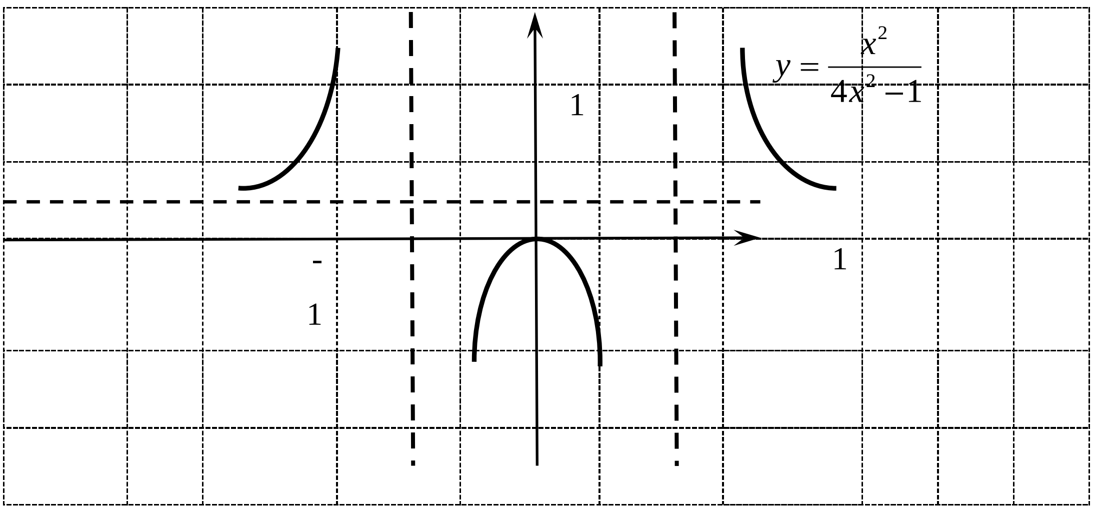
На промежутке $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ - функция выпукла вверх.

12) Точек перегиба нет

13) Составим таблицу значений для построения графика.

x	0	-1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2	2
y	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$

14) Построим график функции.



Выполнить задания самостоятельно.

Построить график функции

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*

$y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$	$y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$
Вариант 4	*Вариант 5*	*Вариант 6*
$y=\dfrac{9x}{9-x^2}$	$y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$	$y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$
Вариант 7	*Вариант 8*	*Вариант 9*
$y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	$y=\dfrac{x^2+7}{x^2-7}$

Форма контроля: письменный отчет в тетради.

Критерии оценки за самостоятельную работу:
Оценка «5» - правильное выполнение не менее 90% заданий самостоятельной работы.
Оценка «4» - правильное выполнение 80-89% заданий самостоятельной работы.
Оценка «3» - правильное выполнение 70-79% заданий самостоятельной работы.
Оценка «2» - правильное выполнение менее 70% заданий самостоятельной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Контрольно-оценочные средства промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к дифференцированному зачёту

1. Понятие предела функции.
2. Непрерывность функции.
3. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$
4. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$
5. Раскрытие неопределенности вида 1^{∞}
6. Первый замечательный предел
7. Второй замечательные предел.
8. Основные правила дифференцирования.
9. Основные формулы дифференцирования.
10. Правило нахождения производной сложной функции.
11. Производные высших порядков.
12. Механический смысл производной.
13. Дифференциал функции.
14. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
15. Понятие асимптоты графика функции.
16. Нахождение асимптот графика функции.
17. Понятия выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
18. Исследование на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции с помощью второй производной.
19. Применение производной к исследованию функций и построению графика
20. Понятия первообразной функции.
21. Понятие о неопределенном интеграле.
22. Свойства неопределенного интеграла.
23. Понятие об определенном интеграле.
24. Свойства определенного интеграла
25. Основная формула интегрального исчисления: формула Ньютона-Лейбница.
26. Интегрирование методом замены переменной.
27. Геометрические приложения интеграла.
28. Физические приложения интеграла.
29. Понятие о дифференциальных уравнениях.
30. Понятия общего и частного решения дифференциального уравнения.
31. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
32. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
33. Понятие матрицы.
34. Линейные операции над матрицами.
35. Понятие определителя матрицы.
36. Вычисление определителей второго и третьего порядка.
37. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
38. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
39. Понятие вектора.
40. Линейные операции над векторами.
41. Скалярное произведение векторов.
42. Векторное произведение векторов.
43. Смешанное произведение векторов.
44. Понятие о мнимой единице

45. Понятие о комплексных числах.
46. Алгебраическая форма записи комплексного числа
47. Квадратные уравнения с комплексными корнями.
48. Действия с комплексными числами.
49. Понятие события в теории вероятности.
50. Виды событий: достоверное, невозможное, случайное, совместные и несовместные, зависимые и независимые события.
51. Классическое определение вероятности события.
52. Теорема сложения вероятностей.
53. Теорема умножения вероятностей.
54. Формула полной вероятности.

Форма промежуточной аттестации: дифференцированный зачёт (тестирование):

Вариант 1

Инструкция к тесту

Тест состоит из 20 тестовых заданий. В тесте использованы тестовые задания различной формы, однотипные задания сгруппированы в блоки. В начале каждого блока заданий имеется инструкция, указывающая на действия, которые Вы должны выполнить для успешного решения тестовых заданий.

При выполнении заданий с формулировкой «*Выберите правильный вариант ответа*» Вы должны выбрать *один* правильный ответ из предложенных.

Вид тестирования – бланковое, с использованием многоразовых бланков теста. Студент выполняет тест на отдельном бланке. В бланк вносится ФИО, номер группы, вариант, номера заданий и соответствующие им буквенные обозначения правильных (правильного) ответов.

Время тестирования -90 мин.

Выберите правильный вариант ответа.

1) МАТРИЦА С=А+3В, ГДЕ А=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. РАВНА:

А) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \\ 5 & 13 & 3 \end{pmatrix}$В) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Б) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$Г) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 1 \\ -1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2) ЗНАЧЕНИЕ ПРЕДЕЛА $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$РАВНО:

А) 0

Б) 1

В) е

Г) ∞.

3) ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{3(x-5)}$РАВЕН:

А) 2

Б) 0

В) ∞

Г) 1

4) КОРНИ УРАВНЕНИЯ $x^2-2x+5=0$РАВНЫ:

А) $x=4i$

Б) $x=-16i$

В)$x_1=1+2i$,$x_2=1-2i$

Г)$x_1=16i$,$x_2=-16i$.

5) ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ $y=\sin x\cdot e^x+5x-27$РАВНА:

А)$\sin x\cdot e^x+5$

Б)$\cos x\cdot e^x+5x$

В)e^x+5

Г) $\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x+5$

6) В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОДСТАНОВКИ t=2x+7 ИНТЕГРАЛ $\int e^{2x+7}\,dx$РАВЕН:

А) $\int e^t\,dx$

Б) $2\int e^t\,dx$

В)$\int e^t\,dt$

Г) $\frac{1}{2}\int e^t\,dt$

7) ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ$\begin{vmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$ РАВЕН:

А) 28

Б) 0

В) 8

Г) 5

8) УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО ПО ЗАКОНУ $S(t)=2t^3-4t^2+2t+3$, (ГДЕS –РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ОТСЧЕТА В МЕТРАХ, t- ВРЕМЯ В СЕКУНДАХ), В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ t=3с, РАВНО:

А) 28

Б) 0

В) 3

Г) 45

Найдите:

9) УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ГДЕ$\vec{a}=\{-3;2;1\}$И$\vec{b}=\{3;0;4\}$

10) ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ $y=\cos(4x-1)$

11) ПРОМЕЖУТОК ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ$y=x^3-6x^2$

12) КОЛИЧЕСТВО СПОСОБОВ, КОТОРЫМИ МОЖНО ИЗ 25 УЧЕНИКОВ КЛАССА ВЫБРАТЬ ЧЕТЫРЕХ УЧАЩИХСЯ ДЛЯ ДЕЖУРСТВА НА ВЕЧЕРЕ

13) ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО ОДИН ВЫНЯТЫЙ НАУГАД БИЛЕТ В ЛОТЕРЕЕ ИЗ 1000 БИЛЕТОВ ВЫИГРЫШНЫЙ, ЕСЛИ ИЗВЕСТНО, ЧТО ВЫИГРЫШНЫХ БИЛЕТОВ В ЛОТЕРЕЕ 200.

14) ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ МЕТОДОМ ПОДСТАНОВКИ $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$

15) ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА $y''(1)$, ГДЕ $y = lnx$

Вычислите:

16) ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x^2+4}{x^3+4x^2+2x}$

17) ИНТЕГРАЛ $\int \frac{x^2+x+5}{2x} dx$

18) ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\frac{1+i}{1-i} + (3-2i)$

Решите:

19) СИСТЕМУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}$

20) ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ: y'=3x+1

Ключ к тесту

Вариант 1	
№	**Ответ**
1.	А
2.	Б
3.	Г
4.	В
5.	Г
6.	Г
7.	В
8.	А
9.	arccos$\frac{1\sqrt{14}}{14}$
10.	dy=-4sin(4x-1)dx
11.	(-∞;2)

12.	4845
13.	$\frac{8}{29}$
14.	10
15.	-1
16.	2
17.	$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}ln\|x\| + C$
18.	3-i
19.	(2;0;1)
20.	y=$\frac{3}{2}x^2 + x + C$

Критерии оценивания результатов тестирования:
от 18 до 20 правильных ответов– «5» отлично
от 14 до 17 правильных ответов– «4» хорошо
от 10 до 13 правильных ответов– «3» удовлетворительно
9 и менее правильных ответов– «2» неудовлетворительно

Итоговая оценка по дисциплине ставится с учетом оценки за тест и оценок по всем практическим работам в соответствии с рабочей программой дисциплины.